

RETROSPECTIVA MATEMATICA

Culegere de probleme întocmită de
TITUS POPESCU



1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

200

400

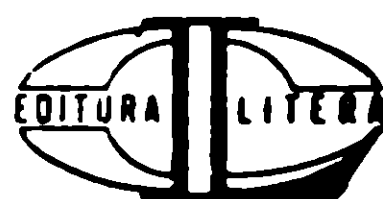
200

Retrospectivă matematică
Culegere de probleme întocmită de
Titus I. Popescu

Retrospectivă matematică

Culegere de probleme întocmită de

TITUS I. POPESCU



BUCUREȘTI — 1977

Coperta de Eugen Stoian

Referent științific: Eugen Rusu

Cuprinsul

— Cuvînt introductiv 5

— Despre numere și sisteme de numerație 9

PROBLEME

1. Probleme antice și medievale 21

2. Probleme captivante 44

3. Probleme celebre 59

4. Probleme criptaritmetrice 67

— Probleme cu lege de compoziție 69

5. Erori și paradoxuri matematice 72

 a. Erori matematice 72

 b. Paradoxuri logico-matematice 79

6. Un concurs antrenant 82

7. Probleme recreative 87

8. Versiuni noi ale unor probleme mai vechi 96

— Date sumare asupra unor matematicieni citați în lucrare 100

— Cîteva opere de matematică celebre în antichitate 106

— Orientare (relativă) asupra nivelului problemelor 108

RASPUNSURI

1. Probleme antice și medievale 111

2. Probleme captivante 140

3. Probleme criptaritmetice 167

4. Un concurs antrenant 172

5. Paradoxuri matematice 173

6. Probleme recreative 175

7. Versiuni noi ale unor probleme mai vechi 181

— Bibliografie 187

Cuvînt introductiv

Prezenta lucrare are o structură originală prin faptul că își propune să pună cititorul în situația de a parcurge, printr-un bogat șir de probleme, evoluția matematicilor elementare, începînd din antichitate.

Această călătorie, însă, nu este numai informativă, nu este participarea la un film atractiv, ci are un serios caracter formativ și instructiv, îndeosebi pentru tineret.

În plus, această retrospectivă mobilă și antrenantă are o calitate greu de prețuit, aceea de a pune în lumină vie și revelatoare rădăcinile permanent active ale matematicii în realitatea obiectivă, în practica socială, chiar și atunci cînd problema înfățișată are un caracter ostentativ distractiv. Este chiar surprinzător de frecvent acest caracter în preocupările celor mai de seamă savanți și cărturari ai tuturor epocilor, iar faptul că autorul reușește să-l integreze cu eleganță, dar și cu hotărîtă fidelitate de-a lungul întregii sale lucrări, constituie un merit ce trebuie subliniat.

Culegerea de probleme nu are un caracter didactic deliberat și deci nu trebuie privită ca un auxiliar al pregătirii vreunei categorii de elevi sau studenți în vederea vreunui examen sau concurs. Totuși, ar fi greșit și chiar mai rău, superficial, să credem că problemele cuprinse în ea nu ar fi utile unei astfel de pregătiri. Dimpotrivă, multe dintre ele prezintă dificultăți care impun stăpînirea sigură a raționamentelor matematice, dau de lucru ingeniozității și necesită folosirea unor tehnici delicate ale instrumentelor matematice. Este dealtfel și firesc să fie așa, dacă ținem seama că unele probleme sînt semnate de nume prestigioase, iar altele fac parte din patrimoniul, din fericire păstrat și transmis pînă la noi, al științei universale a veacurilor trecute.

Stăpînind o deosebită cultură științifică și calități literare, autorul prezintă cu talent diferitele secțiuni ale textului. Lucrarea are la bază o concepție clară care apare chiar din titulatura capitolelor. Ea începe cu o prezentare a modului în care omenirea a conceput și asimilat numerele și cum le-a reprezentat grafic, cum le-a exprimat verbal și cum le-a folosit în operațiile elementare. Diversele sisteme de numerație folosite din cea mai îndepărtată antichitate ne dau o viziune tulburătoare a eforturilor făcute de mintea omenească pentru a stăpîni numerele și operațiile cu acestea în viața socială, în practică și în dezvoltarea altor discipline științifice.

Ca o urmare firească a acestui capitol introductiv, cel de al doilea este consacrat problemelor antice și medievale. Aci găsim nume ca cele ale lui Arhimede,

Hipocrate din Chios, Eudoxiu din Cnidos, Fibonacci, Leonardo Pisano, Luca Pacioli sau Leonardo da Vinci, alături de altele ale unor învățați orientali ca Sun-tzi, Bhaskara, Anania din Șirak, Liu Huei, Al-Horezmi sau Al-Karadji.

Dar găsim și texte anonime de probleme egiptene și sumero-babilonene, rusești, precum și altele care nu se mai știe de unde și cum provin, dar au ajuns pînă la noi împregnate în acel parfum nostalgic al trecutului pe care stilul epocii respective ni-l insinuează subtil.

Literatura beletristică nu este nici ea lipsită de probleme matematice și autorul ne oferă exemple din Creangă și Cehov.

Următorul capitol se intitulează „Probleme captivante”, exprimînd predilecțiile autorului pentru un număr important de probleme sembrate de nume răsunătoare sau chiar nesembrate, dar suscitînd interesul și curiozitatea prin enunțurile lor, ca și prin căile ingenioase de rezolvare.

Începînd cu celebra problemă a Didonei, capitolul ne pune în fața tabloului pictorului Bogdanov-Belski în care se cere efectuarea unui calcul aritmetic, ne trece la problema lui Newton, apoi la o problemă propusă de un zidar român și publicată în Gazeta Matematică A. Numele mari nu lipsesc din nici o pagină a acestui capitol unde îi întîlnim pe Euler, Tolstoi, Lalescu, Dudeney (enigmatist englez celebru), Napoleon Bonaparte, Țițeica, Miquel etc. Dar și alte probleme ca cea a celor două izvoare de lumină, a celor 8 locomotive, a celor 7 poduri, a înălțimii munților din Lună, a zborului spre Lună, a rachetelor care se ciocnesc, a luptătorilor sau a nucilor de cocos, a sferei găurite, a hărții sînt demne de a trezi interesul și pasiunea amatorilor ca și a specialiștilor.

Capitolul este completat cu prezentarea unora dintre problemele celebre rămase în bună parte nerezolvate ca: dublarea cubului, trisecțiunea unghiului, cvadratura cercului, teorema lui Fermat sau problema lui Goldbach. Astfel, cititorul este, pe de o parte, informat corect asupra acestor probleme, iar pe de altă parte, îndemnat să gîndească asupra posibilităților ca și a imposibilităților rezolvării lor.

Problemele criptaritmetice, care fac obiectul capitolului următor, stîrnesc totdeauna curiozitatea și interesul, fiind asimilate cu jocurile de cuvinte încrucișate, șarade, rebusuri etc.

Același interes îl trezesc și paradoxurile matematice, foarte instructive fiindcă arată că raționamentul matematic nu este infailibil și că el trebuie controlat și confruntat cu realitatea obiectivă. Erorile, care se fac, nu sînt ușor de descoperit totdeauna și, în consecință, nu trebuie să ne mirăm că între aceste paradoxuri unele sînt celebre.

Dealtfel, întreaga lucrare are o valoare instructivă remarcabilă, autorul avînd calitatea de a-și conduce cititorul în mod plăcut să învețe, ceea ce constituie un dublu cîștig. Un concurs antrenant, capitol care conține numeroasele probleme-test date în S.U.A. la un concurs anual, pune în evidență caracterul competitiv pe care îl cere acest concurs de viteză în raționament.

Lucrarea se încheie cu un capitol intitulat „probleme recreative”. De fapt, sînt probleme de matematici aplicate la viața cotidiană, în actele obișnuite, la situații ce pot apărea oricui. Altele sînt sub formă de basme sau scenete, istorioare care cuceresc pe cititor și-l stimulează să facă raționamente ingenioase, dintre care multe nu necesită nici un instrument matematic complicat, ceea ce le mărește atractivitatea.

Pentru a rezuma această trecere în revistă comentată ca o excursie cu ghid turistic, consider lucrarea lui Titus Popescu reușită atât ca alcătuire, cât și ca prezentare. Autorul stăpânește bine pîrghiile raționamentului matematic, în special ale celui necesar în domeniul matematicii clasice, care prezintă dificultăți din cauza mării varietăți a problemelor ce pot apărea.

Dat fiind valoarea acestei lucrări care se adresează unui număr mare de cititori de diverse profesii și vîrste, inclusiv elevilor de liceu și profesorilor lor, o recomandăm cu căldură.

Acad. N. TEODORESCU

Despre numere și sisteme de numerație

Numărul reprezintă rezultatul unei măsurări.

Acestui rezultat putem face să-i corespundă un semn grafic sau un grup de semne grafice.

Newton definește numărul real, nu ca o reuniune de unități, ci ca un raport abstract între o mărime oarecare și o altă mărime de același gen, luată ca unitate.

M. Cantor, cunoscut istoric al matematicii, consideră numărarea, respectiv numărul natural, ca o reunire conștientă a unor obiecte într-un ansamblu.

După Frege și Russel, numărul 1 este definit ca o proprietate sau, mai frecvent, ca o clasă, anume clasa tuturor claselor care conțin, fiecare, un singur element.

Numărul 2 este definit analog (ș.a.m.d.).

Evoluția acestor concepte și modul de concretizare, în timp și spațiu, la diferite popoare, sînt de o varietate uimitoare.

La tribul indian de vînători abiponi din Argentina, pe cale de dispariție, călătorii au descoperit la începutul secolului trecut numerele 1 — initaria și 2 — inioaka. Numărul 3, ei îl exprimau ca inioaka-initara (după principiul aditiv), numărul 4 — degetele struțului, 5 — degetele mîinii, 10 — degetele ambelor mîini, 20 — degetele mîinilor și ale picioarelor.

N. N. Mikluho-Maklai a descris un procedeu de numărare la locuitorii din Noua Guinee:

„Papușul îndoia degetele mîinii unul după altul, emițînd un anumit sunet, de exemplu; be, be, be

Ajungînd la 5, el spune ibon-be (mîină).

Apoi el îndoia degetele celeilalte mîini, repetînd din nou be, be, . . . pînă cînd ajunge la ibon-ali (două mîini). Apoi el merge mai departe, murmurînd be, be . . . pînă cînd ajunge la samba-be și samba-ali (un picior, două picioare).

Dacă trebuie să numere mai departe, papușul folosește mîinile și picioarele unui alt ins“.

Și astăzi multe triburi australiene, de exemplu cele care locuiesc în golful Cooper, exprimă numeralele folosind repetarea: 1 — guna, 2 — barcula, 3 — barkulaguna, 4 — barkula barkula.

În unele limbi, forma plural se dă prin simpla repetare; de exemplu în limba hindi: bhai — frate, bhai-bhai — frați.

*

Sistemul de a scrie și citi numerele pe care îl folosim azi se numește *pozițional*, deoarece rolul principal îl joacă poziția cifrei.

Cifrele întrebuintate se numesc cifre arabe, deși originea sistemului o găsim în India.

Aceste cifre nu au fost descoperite de un anumit învățat, ci de oameni însărcinați cu ținerea socotelilor comerțului, care au căutat procedee noi, mai potrivite acestui scop.

Cifra zero a fost descoperită mai târziu, abia pe la anul 100–150 al erei noastre. La indieni era denumită sunia (gol).

Sistemul de numerație pus la punct apare scris într-o lucrare din anul 770, dar calea intrării sale în uz a fost foarte sinuoasă.

El a fost introdus în Europa mult mai târziu — pe la anul 1200, în Italia, — prin arabi, care făceau comerț cu indienii.

Sistemul folosit de noi este sistemul cu baza 10, adică *sistemul zecimal*. Această bază a cunoscut o largă întrebuintare, deoarece oamenii au învățat să numere și să socotească pe degete.

Călugărul Baeda (irlandez, 673 — 735) în lucrarea sa „*De temporum ratione*” face unica descriere completă a numărătorii pe degete. Degetele îndoite în anumite feluri pe palma mâinii reprezintă unități, zeci, sute și mii, iar anumite gesturi făcute cu mâinile *permit numărătoarea pînă la un milion*.

Începînd cu Boethius, englezii numesc și azi unitățile — digitis, iar francezii — doigts.

O expunere amplă, în imagini, a numărătorii pe degete (pînă la 9000) găsim și în lucrarea lui L. Pacioli (1494), „*Summa de arithmetica*”.

În istoria culturii popoarelor întîlnim multe sisteme de numerație, adică sisteme cu baze diferite: 2, 3, 5, 10, 12, 20, 60.

Dintre acestea, exceptînd pe cel în baza 10, cele mai răspîndite au fost sistemele cu bazele 5 și 20, găsite la popoarele din Siberia de Nord, America, Africa și Oceania.

Astfel, în limba api din Noile Hebride, seria numerelor simple se termină cu 5, numit *luna*, adică „mîna”; numerele succesive sînt compuse: 6 este 0-tai („un alt 1”, adică $5+1$; 7 este 0-luna („un alt” = $5+2$) etc, în timp ce „zece” este exprimat prin luna-luna, adică „două mîini”.

Babilonenii au avut sistemul de numere cu baza 60, adică sexagesimal, dar foloseau și un sistem mixt sexagesimal și zecimal.

În China, cele mai vechi inscripții numerice se întîlnesc pe oase de ghicit din secolele al XIV-lea — al XI-lea î.e.n. Numărătoarea avea un caracter zecimal. Cel mai mare număr întîlnit este 30 000. Pentru scrierea numerelor se folosesc cifre-bastonase cu valoare pozițională: unitățile, sutele, zecile de mii sînt verticale, iar zecile și miile orizontale.

În Mexic, aztecii (sec. al XII-lea e.n.) aveau o scriere hieroglifică și foloseau un sistem de numerație nepozițional cu baza 20. Exemple: $10 = \Diamond$; $20 = P$; $50 = PP\Diamond$.

Unitatea următoare superioară era $400 = \Downarrow$ din care prin înjumătățire se obținea $200 = \sqrt{}$

Sistemul cu baza 12 se întâlnește la unele triburi din Africa centrală; o rămășiță a lui este numărarea în duzini. Din punct de vedere matematic se apreciază că acest sistem de numerație este mai avantajos decât celelalte (cu baza 5 sau 20), deoarece baza sa (12) se împarte prin 3 și 4 și, datorită acestui fapt, este ușor de făcut operații cu împărțirile frecvent întâlnite ale cercului și timpului.

În marea Coralilor, la răsărit de strâmtoarea Terres, unele triburi nu trec de *sistemul binar*: ele nu cunosc decât numerele 1 (urapun) și 2 (okosa); toate numerele superioare sînt compuse prin adunarea: 4 este okosa-okosa, 5 este okosa-okosa-urapun, adică $2+2+1$.

În prezent, sistemul binar, complet incomod pentru viața de toate zilele, este folosit cu avantaje enorme în principiul de funcționare — calcul al calculatoarelor.

În sistemul binar nu avem decât două cifre: 0 și 1.

Operațiile aritmetice în acest sistem au la bază două reguli: a) $1 + 1 = „10”$ și b) $1 \cdot 1 = 1$.

Exprimarea unui număr din sistemul zecimal într-un nou sistem de numerație se face prin împărțirea numărului dat la noua bază; resturile succesive și ultimul cît obținut sînt cifrele numărului căutat.

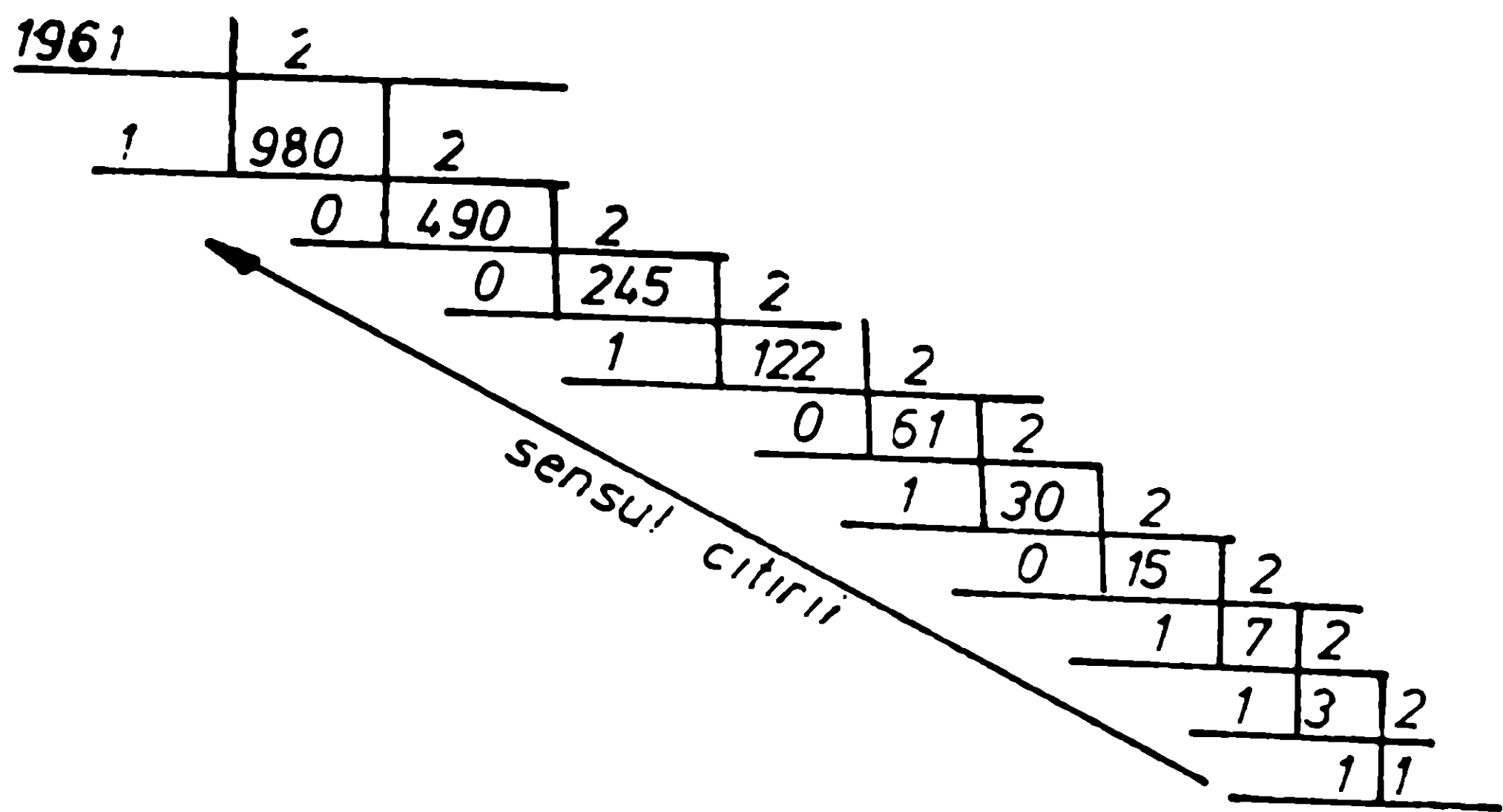
Astfel, pentru a exprima numărul 1961, scris în baza 10, printr-un număr cu baza 2, vom proceda astfel:

$$1961_{10} = X_2$$

$\begin{array}{r} 1961 : 2 \\ \underline{18} 980 \\ 16 \\ \underline{16} \\ ==1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 980 : 2 \\ \underline{8} 490 \\ 18 \\ \underline{18} \\ ==0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 490 : 2 \\ \underline{4} 245 \\ 9 \\ \underline{8} \\ 10 \\ \underline{10} \\ =0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 245 : 2 \\ \underline{2} 122 \\ =4 \\ \underline{4} \\ =5 \\ \underline{4} \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 122 : 2 \\ \underline{12} 61 \\ ==2 \\ \underline{2} \\ 0 \end{array}$
$\begin{array}{r} 61 : 2 \\ \underline{6} 30 \\ =1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 30 : 2 \\ \underline{2} 15 \\ 10 \\ \underline{10} \\ 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 15 : 2 \\ \underline{14} 7 \\ =1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 7 : 2 \\ \underline{6} 3 \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 : 2 \\ \underline{2} 1 \\ 1 \end{array}$

Rezultă: $X_2 = 11110101001$

Deci $1961_{10} = 11110101001_2$



Verificarea se poate face punînd în evidență puterile bazei:

$$11110101001_2 = 1 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = 1961_{10}$$

Trecerea unui număr dintr-un sistem de numerație cu o bază oarecare în sistemul cu baza 10 se face astfel: înmulțim numărul unităților de cel mai mare ordin n cu baza ridicată la puterea $n-1$; la produsul obținut adunăm numărul unităților de ordin imediat inferior $n-1$ înmulțit cu baza ridicată la puterea $n-2$ etc.

Exemple. 1) Dacă sistemul de numerație ar fi în baza 8, atunci numărul 256_8 (atenție: nu se citește două sute, cincizeci și șase.) se poate scrie în sistemul zecimal astfel:

$$256_8 = 2 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 6 \cdot 8^0 = 2 \cdot 64 + 5 \cdot 8 + 6 = 174_{10}$$

2) Să se arate că:

$$(501_7 - 141_5) \cdot 1010_3 + (562_8 - 154_6) \cdot 1010_2 : 9000_{10} = 1$$

Rezolvare:

$$\begin{aligned} & (5 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 1 \cdot 7^0 - (1 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0)) \cdot (1 \cdot 3^3 + 0 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 0) + \\ & + (5 \cdot 8^2 + 6 \cdot 8^1 + 2 \cdot 8^0 - (1 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6 + 4)) \cdot (1 \cdot 2^3 + 0 + 1 \cdot 2 + 0) = \\ & = (245 + 1 - (25 + 20 + 1))(27 + 3) + (320 + 48 + 2 - 70) \cdot 10 = \\ & = (246 - 46) \cdot 30 + (370 - 70) \cdot 10 = 9000 : 9000 \equiv 1 \end{aligned}$$

3. Să se demonstreze identitatea:

$$(10010_2 + 1120_3) \cdot 121_4 - 4000_5 = 32_6 \cdot 101_7$$

Soluție:

$$10010_2 = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2 = 18_{10}$$

$$1120_3 = 1 \cdot 3^3 + 1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 = 42_{10}$$

$$121_4 = 1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 4^0 = 25_{10}$$

$$4000_5 = 4 \cdot 5^3 = 500_{10}$$

$$32_6 = 3 \cdot 6 + 2 = 20_{10}$$

$$101_7 = 1 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 1 \cdot 7^0 = 50_{10}$$

Identitatea devine în sistemul zecimal:

$$(18 + 42) \cdot 25 - 500 = 20 \cdot 50$$

$$60 \cdot 25 - 500 = 1000$$

$$1500 - 500 \equiv 1000$$

Adunarea în sistemul binar se face ca și în sistemul zecimal, ținând seama că două unități de un ordin alcătuiesc o unitate de ordin imediat superior și trebuie transformate.

$$\begin{array}{r} \text{Exemplu: } 1111\ 111 + \\ \quad 11\ 111 \\ \quad 1\ 111 \\ \quad 11\ 111 \\ \hline 11001 \cdot 100_2 \end{array}$$

La scădere se ține seama că, dacă trebuie să ne „împrumutăm”, o unitate de ordin superior este egală cu două unități de ordin imediat inferior.

Efectuând scăderea în sistemul zecimal: $97 - 23 = 74$, în sistemul binar obținem:

$$\begin{array}{r} 1100001 - \\ \quad 10111 \\ \hline 1001010 \end{array}$$

$$\text{Verificare: } 1 \cdot 2^6 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 64 + 8 + 2 = 74_{10}$$

Din aceste câteva exemple, se remarcă imediat faptul că unor numere „mici” în sistemul zecimal le corespund numere „mari” (cu multe cifre) în sistemul binar.

Acest dezavantaj aparent este compensat cu prisosință de viteza curentului electric ce străbate fulgerător „pozițiile” cifrelor (în sistemul binar) din mașina de calculat.

O autobiografie misterioasă.

Printre hîrțiile unui matematician a fost găsită autobiografia lui. Ea începea cu următoarele rînduri:

„Eu am terminat universitatea la vîrsta de 44 de ani. După un an, fiind un tînăr de 100 de ani, m-am însurat cu o fată de 34 ani. Diferența neînsemnată de vîrstă dintre noi — de numai 11 ani — a contribuit la comunitatea noastră de interese și idei.

Peste cîțiva ani aveam deja o mică familie cu 10 copii. Salariul meu era de 200 ruble, din care 1/10 îi dădeam surorii mele, așa încît noi, cu copiii, am trăit cu 130 ruble pe lună”.

Cum pot fi explicate contradicțiile curioase dintre numerele prezentate în aceste fragment?

(I. I. Perelman, *Aritmetica distractivă*)

Secretul rezolvării este trădat de fraza: „după un an (peste 44 ani), fiind un tînăr de 100 ani” ... de unde rezultă că datele problemei corespund unui sistem nezecimal. Dacă prin adăugarea unei unități numărul 44 se trans-

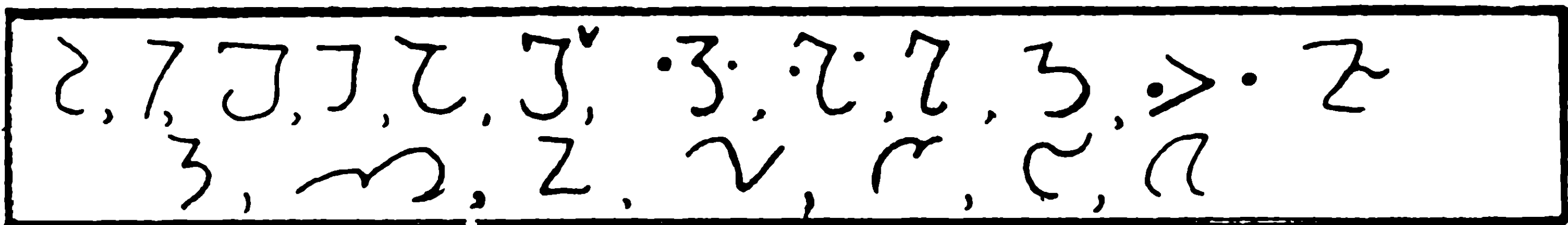
DINAMICA CIFRELOR

pe meridianele Pământului și ale Timpului

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Observ.
EGIPT (vechea cultură)	I	II	III								cifre hieroglife înlocuite apoi cu scrierea hieratică și demotică
MESOPO-TAMIA (sumero-babiloneni)	○ 𐎶		𐎵							○ 𐎶	inițial, apoi scriere cuneiformă
INDIA	—	=	≡	𑂔	𑂕	𑂖	𑂗	𑂘	𑂙		cifre indiene brahmi
	eka	dvi-	trai-	ciat	pan-	șas-	sap-	așton-	avada-	śa-	
	2	3	3	𑂔	𑂕	𑂖	𑂗	𑂘	𑂙		cifre sanscrite -davangari sunia
	I	II	III	X	IX	IIIX		XX		7	cifre kharoṣṭī
CHINA	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	cifre hieroglife
	i	r	san	sî	u	liu	ți	da	tziu	și	
	I	II	III	IIII	IIII	IIII	T	TT	TTT	TTTT	cifre bastonașe (sec. XII e. n.)
FENICIA	I	II	III	VIII	II	III	IIII	IIII	IIII	IIII	—
PALESTINA	𐤀								𐤄	𐤅	
ELADA (GRECIA)	—								Δ		atică sec I î e n
	—								▷		beo-tică numerație herodiană
	α	β	γ	δ	ε	ς	ζ	η	θ	ι	Înlătură numerația precedentă
	.	..	...	...	...	...			⋮		Pitagoreice (numere figurate)
ROMA ANTICA (romani, etrusci)	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII si IIX	IX	X	

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Observ.
ȚĂRILE ISLAMULUI		1	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹		cifre arabe răsăritene
		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹		cifre arabe apusene
		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۵	cifre djumal (sud M. Caspică)
AMERICA	MAYA	.	..	...		—	⋮	⋮	⋮	⋮	=	sec. IV i.e.n.
	AZTECI	.	..	∴	∴	∴	∴	∴	∴	∴	◊	sec XII e.n.
ARMENIA		Ը	Բ	Գ	Դ	Ե	Զ	Է	Ը	Թ		Evol mediu
GEORGIA		Ⴀ	Ⴁ	Ⴂ	Ⴃ	Ⴄ	Ⴄ	Ⴄ	Ⴄ	Ⴄ		
INDIA		॑	॒	॓	॔	ॕ	ॖ	ॗ	क़	ख़	ग़	Cifre hinduse (Gvalior)
ARABI		1	2	3	٤	٥	6	7	8	9		Cifre vestarabe (Gubar)
		۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	.	Cifre estarabe (actuale turcești)
EUROPA OCCID	MANUSCRIS sec XII	1	۲	7	۴	6	7	8	9	0		Evol mediu
	VIDMANN 1489	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Q	.
	A DÜRER 1525	2	2	3	4	5	6	7	8	9		.
RUSIA		Ѧ	Ѣ	Ѥ	Ѧ	ѥ	Ѧ	ѧ	Ѩ	ѩ		Cifre slavone

CIFRA „2” în manuscrise medievale



Acest exemplu ilustrează în mod pregnant cât de mult
a variat forma cifrelor scrise de-a lungul veacurilor

Prima apariție a semnelor minus și plus în manuscrise de algebră (1486)

$$A \quad 14 \cdot \text{se} - 229 \quad 1 \text{se} + 2 \text{se} \quad B$$

$$15 - 22x \quad x^3 + 2x^2$$

RĂSPÂNDIREA CIFRELOR NOI

Pe lespezi funerare	1371	Pforzheim (Baden)
" "	1388	Ulm
Pe monede	1424	Elveția
" "	1458	Germania
" "	1478	Suedia
" "	1485	Franța
" "	1539, 1551	Scotia, Anglia
Pe un document al lui Luca Stroești, logofătul Moldovei	1581	Moldova
Pe pecetea lui Udrishte Năsturel cumnatul lui Motei Basarab	1623	Țara Românească

Sistemul de numerație la egipteni

Sistem zecimal cu semne numerice distincte pentru puterile
lui 10 pînă la 10^7 :

- 10 = (Hieroglifa reprezintă „piedici” pentru împedizarea
vacilor sau un „val”)
- 100 = „stoaară de măsurat”
- 1000 = „floare de lotus”

10000 =  „degetul arătător”

100000 =  „mormoloc”

un milion =  „un om mrat”

zece milioane =  „Soare”

Numarul 15377 se scria astfel



Sistemul de numeratie sumerian

Sistem sexagesimal, in unele cazuri zecimal

Exemplu: numarul $10921 = 3 \cdot 60^2 + 2 \cdot 60 + 1$ se scria astfel:



Sistemul de numeratie la poporul maya

(sec. IV î.e.n)

Sistem pozițional cu baza 20

Exemplu: $360 = \text{semnul zero}$ (semnul zero fiind reprezentat sub

forma unei scoici

Numere de ordin superior în numeratia greacă

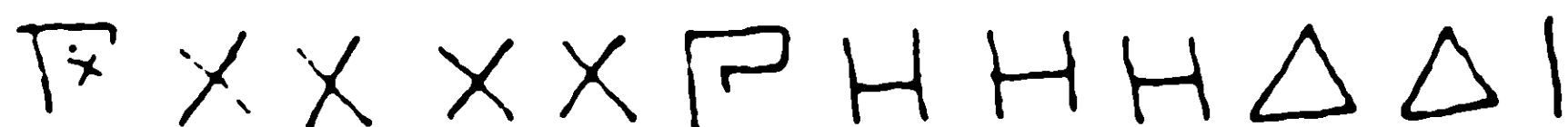
10 = Δ (deka)

100 = H și HE (hekaton)

1000 = X (hilias) și †

10000 = M (miriada)

Exemplu : în scrierea atică numarul 9821 se scria:



formă în 100, aceasta înseamnă că cifra 4 este cea mai mare în acest sistem și prin urmare baza sistemului este 5. Transformând numerele din sistemul cincinal în cel zecimal, constatăm că biografia nu conține nici un fel de contradicții.

„Eu am terminat universitatea la vîrsta de 24 ani. După un an m-am însurat, fiind tînăr de 25 ani, cu o fată de 19 ani. Diferența mică de vîrstă dintre noi — de numai 6 ani — a contribuit la comunitatea noastră de interese și idei.

Peste cîțiva ani aveam deja o mică familie cu 5 copii. Salariul meu lunar era de 50 ruble, din care 1/5 îi dădeam surorii mele, așa încît noi, cu copiii, am trăit cu 40 ruble pe lună.“ Și misterul s-a risipit . . .

PROBLEME

PROBLEME

1. Probleme antice și medievale

În literatură, creațiile populare au impresionat totdeauna prin exteriorizarea spontană, dar plină de farmec, a unor profunde sentimente umane. În ele vedem înțelepciunea poporului.

În „probleme antice și medievale“, întâlnim același filon, care ne conduce în templul plin de podoabe al vechii creații matematice.

Și ele ne atrag cu un farmec mereu viu, pentru că sînt spontane ca inteligența înnăscută, merg drept la țintă ca dorul într-o inimă deschisă și sînt presărate cu nelipsitele elemente ale naturii, care ornamentau laboratorul vechilor matematicieni . . . Buchetul de lotuși curați, albinele ce zboară din floare-n floare, păsările cerului se întretaie cu dorințele arabului pe patul de moarte, cu fiorii iepurelui urmărit de cîine și . . . toate așteaptă răspunsul cerut în graiul cifrelor.

Ca în orice creație de acest fel, variantele nu lipsesc și compararea lor în timp și spațiu dezvăluie nepotolita sete de cunoaștere a omului, chiar în condițiile năvălirilor pustietoare, ale inchiziției virulente, ori ale existenței a nu mai puțin de 27 metode de înmulțire („în șah“, „prin îndoire“, „pe părți sau rupt“, „în rețea“, cu „spatele în față“, „în cupe“, „în diamant“ etc; „în barcă sau galeră“ (pentru împărțire), metode greoaie pentru învățarea cărora trebuia mult timp și un talent înnăscut.

Redînd la lumină aceste probleme — înflorite gratuit de diferiți autori — ne facem o datorie morală față de creatorii lor, satisfăcînd, în același timp, și curiozitatea firească a unei cunoașteri din care comparațiile cu actuala problematică și cu noile mijloace de rezolvare scot în evidență meritele deosebite ale promotorilor acestei prestigioase discipline a spiritului uman.

1. Să se citească numărul 1180703051492863.

Al-Horezmi (Islam)

2. Să se determine un număr multiplu de 7, care împărțit prin 2, 3, 4, 5 și 6 să dea la rest 1.

Fibonacci (întîlnită și la Al-Haisam)

3. Să se determine un număr, care împărțit prin 3,5 și 7 dă, respectiv, resturile 2, 3 și 2¹.

Fibonacci; Sun-țzi (sec. III sau IV)

4. Dintr-un buchet de lotuși curați, a treia, a cincea și a șasea parte sînt aduse în dar, respectiv zeilor Șiva, Vișnu și Suria, iar o pătrime — lui Bhavani. Restul de 6 lotuși se dau unui prea cinstit dascăl. Răspunde-mi repede cîți lotuși erau în total.

Bhaskara (în Lilavati)

5. Să se împartă 48 de pîini la 6 persoane astfel „ca diferența dintre fiecare om și vecinul lui să fie egală cu o mărime dată, 2 pîini“.

(Adaptare după o problemă egipteană)

6. „Opisul inventarului gospodăriei: 7 case, 7 pisici, 7 șoareci, 7 spice de orz, 7 măsuri de grăunțe; cite (obiecte) în total?“

(Veche problemă egipteană)

7. Șapte bătrîne au plecat spre Roma. Fiecare avea cîte 7 catîri, pe fiecare catîr erau cîte 7 saci, cu cîte 7 pîini fiecare; pe lîngă fiecare pîine erau 7 cuțite, fiecare cuțit fiind băgat în cîte 7 teci. Cîte obiecte erau cu totul?

Fibonacci

8. „Merg pe drum șapte babe;
Fiecare babă are șapte toiége;
Pe fiecare toiag sînt șapte noduri;
Pe fiecare nod sînt șapte traiste;
În fiecare traistă sînt șapte plăcinte;
În fiecare plăcintă sînt șapte vrăbii;
Fiecare vrăbie are șapte pipote . . .
Și cu totul cîte sînt?“

(Dintr-un manuscris rusesc medieval)

9. Să se determine termenii progresiei aritmetice: a_1 , $a_2 = a_1 + d$, . . .
. . . $a_9 = a_1 + 8d$ pentru condițiile:

$$a_7 + a_8 + a_9 = 4$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3$$

(Matematica în nouă cărți, cartea a VI-a)

10. Cît de mare va fi o cireadă de vaci și de vițele provenită în 20 de ani de la o singură vacă, cu condiția ca vaca să nască la începutul fiecărui an cîte o vițea, iar vițelele să dea aceiași urmași, cînd ating vîrsta de 3 ani.

Naraiana (sec. al XIV-lea)

¹ Cunoscută azi sub numele de „problema chineză a restului“.

11. Să se împartă $1\frac{2}{3}$ mine de argint între 10 frați astfel încît cotele-părți ale fraților să formeze o progresie aritmetică, știind că cota celui de-al optulea frate este egală cu 6 sekeli.

(Probleme sumero-babilonene)

12. Pe patul de moarte, un tată împarte în mod egal banii între fiii săi, primului 1 monedă și $\frac{1}{7}$ din restul banilor, celui de al doilea 2 monede și $\frac{1}{7}$ din rest, celui de al treilea 3 monede și $\frac{1}{7}$ din rest etc. și cînd termină, se stinge.

Cîți bani și cîți copii avusese acel tată?

Călugărul Maximus Planudes din Nicomedia (1260—1310)

13. Doi oameni cumpără o turmă de porci cu 100 de soldi, la prețul de 5 porci cu 2 soldi. Apoi ei împart turma și încep să vîndă 5 porci cu cîte 2 soldi și cîștigă bine. Cum e posibil aceasta?

Albinus Flacus (Alk-win)

14. Dacă 20 de coți de stofă costă 3 lire, iar 42 de rotuli de bumbac costă 5 lire, cîți rotuli (unitate de greutate din Pisa) de bumbac se pot obține pentru 50 de coți de stofă?

Leonardo Pisano

15. Treizeci de păsări costă 30 de monede, potîrnichile costă 3 monede bucata, porumbeii — 2 monede bucata, iar perechea de vrăbii, o monedă. Cîte păsări sînt din fiecare fel?

Leonardo Pisano

16. Un cal trăpaș și o gloabă pleacă dintr-un punct dat; trăpașul parcurge în prima zi 193 li, iar în fiecare zi următoare cu cîte 13 li mai mult; gloaba parcurge în prima zi 97 li, iar în fiecare zi următoare cu cîte $\frac{1}{2}$ li mai puțin. După ce a parcurs 3000 li, trăpașul se înapoiază și pe drum se întîlnește cu gloaba. Se întreabă după cîte zile s-au întîlnit cei doi cai și cît a parcurs fiecare?

(*Matematica în nouă cărți*, cartea a VII-a)

17. Cîte perechi de iepuri se vor naște într-un an dintr-o pereche de iepuri, dacă fiecare pereche aduce lunar o nouă pereche, capabilă, la rîndul său, să se reproducă după o lună de la naștere și dacă nici o pereche nu moare?

Fibonacci

18. Să se determine numărul cel mai mic de greutateți cu care se pot cîntări toate greutatețile întregi, mai mici decît una oarecare dată.

Leonardo Pisano

19. Să se calculeze înălțimea unui arbore din care $\frac{1}{3}$ și $\frac{1}{4}$ alcătuiesc 21 de șchioape și se află sub pământ.

Leonardo Pisano

20. Un joc de zaruri în care câștigă cel care realizează 6 puncte se oprește, când unul dintre jucători realizează 5 puncte, iar celălalt, 2.

În ce proporție trebuie împărțită miza?

Luca Pacioli

21. Doi oameni au în punga lor o anumită sumă de bani. Dacă primul om va căpăta de la cel de-al doilea 7 dinari, atunci el va fi de cinci ori mai bogat decât al doilea; dacă al doilea om va primi de la primul 5 dinari, el va fi de șapte ori mai bogat decât primul. Câți bani are fiecare?

Leonardo Pisano

22. Pe un zid de 90 țuni crește un dovleac a cărui tulpină se ridică într-o zi cu 7 țuni; jos crește un dovleac a cărui tulpină se ridică într-o zi cu 10 țuni. Când se vor întâlni ei?

(*Matematica în nouă cărți*, cartea a II-a)

23. De la tatăl meu am auzit următoarele:

În timpul cunoscutelor războaie dintre armeni și perși, Zaurak Kam-sarakan a săvârșit fapte extraordinare; se pare că, atacând armatele persane de trei ori într-o lună, el distruse de prima dată jumătate din oastea lor și, urmărind-o, a doua oară nimici a patra parte din ea, iar a treia oară — a unsprezecea parte; cei rămași în viață, în număr de 280, o luară la fugă spre Nahceavan.

Și, astfel, noi trebuie să aflăm după această rămășiță, câți fuseseră ei pînă la înfrîngere.

Anania din Șirak

24. Un ciine urmărește un iepure. Iepurele sare de fiecare dată cîte 7 picioare, în timp ce ciinele sare 9. În cîte salturi va fi ajuns iepurele de ciine, care se găsește la o distanță de 150 de picioare în urma sa?

Albinus Flacus (Alk-win)

25. Se împart 100 de scheffeli (unitate de cereale germană, aprox. 70 l) între 100 de bărbați, femei și copii. Fiecare bărbat primește cîte 3 scheffeli, fiecare femeie, cîte 2, iar doi copii, un scheffel. Câți erau din fiecare?

Albinus Flacus (Alk-win)

26. Vînzîndu-se 2 bivoli și 5 berbeci și cumpărîndu-se 13 porci, rămîn 1 000 de țiani; vînzîndu-se 3 bivoli și 3 porci, banii ajung exact pentru cumpărarea a 9 berbeci; vînzîndu-se 6 berbeci și 8 porci, se cumpără 5 bivoli, dar n-ajung 600 țiani. Să se afle costul unui bivol, al unui berbec și al unui porc;

(*Matematica în nouă cărți*, cartea a VIII-a)

27. Deînmulțitul și înmulțitorul 2 003 320. Înmulțește cu (0) 30,1001640. Înmulțește 1 001640 cu 1 001 640. 10 033 204 374 640. Scade 1 de aici: Rămîne (000)33 204 374 640. Ce trebuie înmulțit cu ce pentru a obține (000)33 204 374 640?

(Probleme sumero-babilonene)

28. Șaptezeci și opt trunchiuri de bambus mari și mici costă 576 țiani; un trunchi mare costă cu 1 țian mai mult decît un trunchi mic. Considerînd prețurile numere întregi, să se afle cît costă fiecare și cîte trunchiuri din fiecare cantitate erau.

(Matematica în nouă cărți, cartea a II-a)

29. Să se determine două numere, astfel încît produsul lor $xy=600$ și să îndeplinească o a doua condiție, care este dată prin diferite expresii (din ce în ce mai complicate), începînd cu $x+y=50$ și pînă la:

$$(3x+2y)^2 + \frac{2}{13} \left\{ 4 \left[\frac{1}{2} (x+y) - \left(\frac{1}{2} + 1 \right) (x-y) \right]^2 + (x+y)^2 \right\} = 17\,100$$

(Probleme sumero-babilonene)

30. Lungimea arcului a șapte spire de elice. (Pe un deal) crește un copac de 2 cijani înălțime, iar circumferința de 3 ci. La picioarele lui crește o pueraria (arbust urcător cultivat ca o plantă ornamentală). Prin 7 spire ea se ridică în jurul copacului pînă în vîrful lui.

Care este lungimea puerariei?

(Matematica în nouă cărți, cartea a IX-a)

31. Pe un deal crește un brad de înălțime necunoscută. Jos, pe cîmp, se află două prăjini, avînd fiecare o înălțime de 20 ci (a), fiind situate pe aceeași dreaptă cu copacul și la o distanță de 50 cijani (b) una de alta.

Vîrful copacului și vîrful primei prăjini formează o dreaptă al cărei capăt intersectează linia pămîntului la o distanță de 7 cijani și 4 ci în spatele prăjinii (c); în acest punct baza copacului măsoară 2, 8 ci (e) de la vîrful prăjinii. Vîrful copacului mai formează o linie dreaptă cu vîrful celei de a doua prăjini din spate și un punct de pe pămînt situat la 8 cijani 5 ci în spatele prăjinii (d).

Să se afle înălțimea (x) a bradului și distanța (y) de la prima prăjină pînă la deal.

Liu Huei

32. *Problema păsărilor.* Cîți cocoși, găini și pui se pot cumpăra cu 100 de monede, dacă în total sînt 100 de păsări și dacă un cocoș costă 5 monede, o găină — 4, iar 4 pui — o monedă.

Siu E (200)

33. La moarte, cineva lasă prin testament celor patru fii ai săi cîte o parte din avere, iar unui alt om îi lasă atît cît alcătuiește partea fiecăruia dintre fii și un sfert din ceea ce rămîne din treimea averii, scăzîndu-se din această parte și un dirhem d (dirhemul joacă rol de parametru, ...). Ce avere s-a împărțit?

Al-Horezmi

34. Pe cele două maluri ale unui râu cu o lăţime de 50 coţi cresc, faţă în faţă, doi palmieri, avînd înălţimea de 20, respectiv 30 de coţi. Pe vîrfurile fiecărui palmier stă cîte o pasăre şi amîndouă vîd un peşte pe suprafaţa apei. Ele se avîntă spre peşte şi ajung simultan la el, pe o dreaptă ce uneşte baza celor doi palmieri. Se cere să se determine locul de întîlnire şi lungimea drumului parcurs de fiecare pasăre.

Al-Karadji

35. Împarte iară pe 10 în două părţi şi împarte pe aceea prin aceasta şi pe aceasta prin aceea, iar rezultatele împărţirilor adună-le cu 10 şi ceea ce se obţine înmulţeşte cu una din părţi şi va rezulta 114.

Leonardo Pisano

36. Pe mijlocul fiecărei laturi a unui oraş de formă pătrată există cîte o poartă. La 20 bu spre nord de poarta nordică se află un stîlp. Dacă de la poarta sudică ne depărtăm cu 14 bu spre sud şi cotim spre apus cu 1775 bu, atunci stîlpul devine vizibil. Care este lungimea laturii pătratului?

(*Matematica în nouă cărţi*, cartea a IX-a)

37. În centrul unui bazin cu latura $(2a)=1$ cijan=10 ci creşte stuf, care se ridică deasupra apei cu $h=1$ ci. Dacă se apleacă stuful, el ajunge pînă la mal. Care este adîncimea apei?¹

• • •

38. Să se rezolve ecuaţiile:

$$a) \ x^3 - 6x^2 + 12x = 35$$

$$b) \ x^4 - 2x^2 - 400x = 9\ 999$$

Bhaskara al II-lea

39. Să se rezolve ecuaţia:

$$\left(x - \frac{x^2}{12 \cdot 30}\right) - \frac{1 \cdot 3}{20 \cdot 16} \left(x - \frac{x^2}{12 \cdot 30}\right)^2 = 20$$

Magavira

40. Să se rezolve ecuaţia:

$$x^2 + (10 - x)^2 = 58$$

Al-Horezmi

41. Să se împartă 10 în două părţi x şi $10 - x$ după condiţia: $\frac{x}{10-x} + \frac{10-x}{x} = \sqrt{5}$

Abu-Kamil

¹ Problemă veche extrasă din bibliografia folosită. Notă valabilă pentru toate problemele din volum, urmate de acest semn.

42. Să se verifice identitățile:

$$\frac{1}{2} \left[\frac{a^2 - b^2}{a - b} + (a - b) \right] = a; \quad \frac{1}{2} \left[\frac{a^2 - b^2}{a - b} - (a - b) \right] = b$$

Al-Karadji

43. Să se rezolve ecuația:

$$4\sqrt{x-3}\sqrt{x} = x - 3\sqrt{x} + 4$$

Abu-Kamil

44. Se caută un număr care înmulțit cu $(3 + \sqrt{5})$ să dea 1.

45. Să se demonstreze egalitățile:

$$4\sqrt{12} + 4\sqrt{13} = \sqrt{\sqrt{27} \pm \sqrt{24}} = \sqrt{51 \pm \sqrt{2 \cdot 592}}$$

Al-Bagdadi (1100)

46. *Problema taurilor din Helicon.*

Este o problemă referitoare la ecuațiile nedeterminate, formulată în versuri și atribuită lui Arhimede.

În raport de unele date, se cere să se găsească numărul taurilor și al vacilor de patru culori distincte, care pasc pe o cîmpie.

R. Problema implică 8 necunoscute. Rezolvarea duce la așa-numita ecuație a lui Pell: $x^2 - Dy^2 = 1$, unde $D = 4\,729\,494$.

Cele mai mici rădăcini întregi, diferite de $x=1, y=0$ ale acestei ecuații sînt atît de mari, încît cele 8 necunoscute se exprimă prin numere cu mai mult de 200 000 de cifre.¹

47. Să se afle un număr al cărui pătrat mărit cu 5 sau micșorat cu un număr dat (10) să fie un pătrat.

Al-Karadji

48. Să se demonstreze egalitățile:

$$\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{16}; \quad \sqrt[3]{54} + \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{128}$$

Al-Karadji

49. Să se determine catetele x, y și ipotenuza z , fiind date perimetrul și aria triunghiului.

Bhaskara

50. Să se găsească diagonalele unui pătrat a cărui latură este notată cu 30.

(Probleme sumero-babilonene)

¹ Vezi pagina 61.

51. Să se împartă 10 în trei părți după condițiile:

$$x + y + z = 10$$

$$\begin{aligned} xz &= y^2 & x < y < z \\ x^2 + y^2 &= z^2 \end{aligned}$$

Abu-Kamil

52. Se consideră iraționala bimedială¹:

$$\sqrt{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} + \sqrt{\sqrt{c} \cdot \sqrt{d}}$$

În ce condiții produsul medialelor²:

$$\sqrt{\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}} \text{ și } \sqrt{\sqrt{c} \cdot \sqrt{d}} \text{ este rațional?}$$

Teetet din Atena

53. Să se rezolve ecuațiile:

$$\text{a) } x^2 = \sqrt{6x} \cdot \sqrt{5x} + 10x + 20$$

$$\text{b) } \left(\frac{1}{3}x^2 + 1\right)\left(\frac{1}{4}x^2 + 2\right) = x^2 + 13$$

Leonardo Pisano

54. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \frac{xy}{x-y} = \sqrt{6} \end{cases}$$

Leonardo Pisano

55. Să se rezolve sistemul³:

$$x + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right)(y + z + u + v) = s$$

$$y + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{480}\right)(z + u + v + x) = s$$

$$z + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{688}\right)(u + v + x + y) = s$$

$$u + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{420}\right)(v + x + y + z) = s$$

$$v + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{27} + \frac{1}{810}\right)(x + y + z + u) = s$$

Leonardo Pisano

¹ Compusă din două mediale.

² Media geometrică a două iraționale.

³ Scris de noi în notație modernă.

56. În câți ani se va dubla un capital depus la o bancă cu dobândă compusă?

Luca Pacioli

57. Să se găsească un pătrat (rațional) care, fiind mărit sau micșorat cu 5, să dea din nou niște pătrate (raționale)¹.

(Propusă lui Leonardo Pisano de magistrul Johannes din Palermo, filozoful împăratului Frederic al II-lea)

58. Să se rezolve ecuația de gradul al treilea:

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20$$

Johannes din Palermo

59. Să se rezolve ecuația:

$$\left(\sqrt{\frac{x}{2}} + 3\right)\left(\sqrt{\frac{x}{2}} + 2\right) = 20$$

Abu-Kamil

60. Să se construiască un pătrat cu latura dată egală cu $2a$.

(Regulile funiei)

61. Să se găsească două dreptunghiuri cu perimetre egale, astfel încât aria unuia să fie un multiplu dat al ariei celuilalt.

Maximus Planudes

62. Cu ajutorul „teoremei lui Pitagora” să se dubleze, tripleze etc. un pătrat dat.

(Regulile funiei)

63. Se caută raza cercului înscris într-un exagon regulat.

(Cuneiformă din Suza)

64. Să se găsească înălțimea unui triunghi echilateral, pentru care suma ariei și a înălțimii este egală cu 10.

Abu-Kamil

65. Să se construiască pătratul egal cu suma a $n^2 + m^2$ pătrate cunoscute.

Abu-I-Vafa

66. Să se afle latura unui pătrat egal cu diferența a două pătrate date: $b^2 - a^2$.

(Regulile funiei)

67. Să se transforme un dreptunghi dat într-un pătrat.

(Regulile funiei)

¹ Compară cu problema 47.

68. Aria unui triunghi dreptunghic este egală cu 30 și suma catetelor 17. Care este suma dintre cateta mai mică și ipotenuză?

Ciju-Și-Țze (1299)

69. Să se rezolve ecuația:

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = x^2 + 2x + 3$$

(*Aritmetica*, Diofant)

70. Să se rezolve ecuația:

$$576x^4 - 2\,640x^3 + 1\,729x^2 + 3\,960x - 1\,695\,252 = 0$$

Ciju-Și-Țze, (1299)

71. Diferența dintre ipotenuză și una din catetele unui triunghi (dreptunghic) este $36\frac{9}{10}$; produsul catetelor $706\frac{1}{50}$.

Care sînt laturile?

Van Siao-Tun

72. Să se afle aria unui cerc cu ajutorul unei roți, avînd același diametru și a cărei lățime este egală cu jumătate din raza ei.

Leonardo da Vinci

73. Fiind date latura a și aria s a unui triunghi isoscel, să se determine baza b și înălțimea h .

Savasorda (Abraham bar Hiia, matematician evreu din Barcelona: 1070—1136)

74. Un triunghi isoscel are baza egală cu 60 și laturile egale cu 50. Socoțește raza cercului circumscris.

(Cuneiformă din Suza)

75. Se cere să se împartă un triunghi dreptunghic într-un triunghi asemenea lui și într-un trapez, astfel încît produsele părților laturilor, precum și produsele părților ariilor să fie mărimi date, ipotenuza triunghiului mai mic fiind dată.

(Probleme sumero-babilonene)

76. O prăjină de 10 picioare lungime este atîrnată vertical, așa încît deasupra pardoselii mai rămîn 4 picioare. La ce distanță de la capătul ei inferior se găsește pe pardoseală locul din care ea poate fi văzută sub cel mai mare unghi?

Regiomontanus

77. Dacă prelungim orice coardă AB a cercului cu centrul în O , astfel încît $BC = OB$ și ducem linia CO care taie cercul în punctele D și E , atunci: arcul BD va fi egal cu $\frac{1}{3}$ din arcul AE și $\frac{1}{3}$ din arcul BF , unde F este intersecția cu cercul a unei paralele dusă prin E la AB .

Arhimede

78. Pe un segment dat $AB=a$, să se construiască un dreptunghi $ABHJ$ cu aria $a \cdot x$ egală cu a unui pătrat dat b^2 ($b < \frac{a}{2}$), astfel încît partea de arie care nu ajunge pînă la dreptunghiul $ABHJ$ să fie un pătrat ($AEFJ=x^2$).

Eudoxiu din Cnidos

79. Se construiește trapezul $ABCD$ cu laturile 1, 1, 1 și $\sqrt{3}$ (fig. 1). Apoi se descrie în jurul lui un cerc și pe coarda $AD=\sqrt{3}$ se construiește segmentul AED , asemenea fiecăruia din segmentele AFB , BGC și CHD . Să se arate că aria lunulei $AFBGCHD$ este egală cu aria trapezului $ABCD$.

Hipocrate din Chios

80. Pe diametrul AB se construiește un semicerc cu centrul C (fig. 2). Apoi în punctul D , care împarte pe CB în două, se duce o perpendiculară DE pe AB . Mai departe, pe semicerc se caută un punct F , astfel încît $BF=\sqrt{3}AC$ și se unește intersecția G a lui BF cu punctul C .

Prelungirea acestei drepte CG intersectează în punctul H dreapta FH dusă din F și paralelă cu AB .

Apoi, în jurul trapezului $FCBH$, se circumscrie un cerc și încă unul, în jurul triunghiului FGH . Atunci:

a) fiecare din cele două segmente construite pe coardele FG și GH va fi asemenea fiecăruia din cele trei segmente construite pe coardele FC , CB și BH ;

b) fiecare din primele două segmente are o arie de $1\frac{1}{2}$ ori mai mare decît fiecare din ultimele trei;

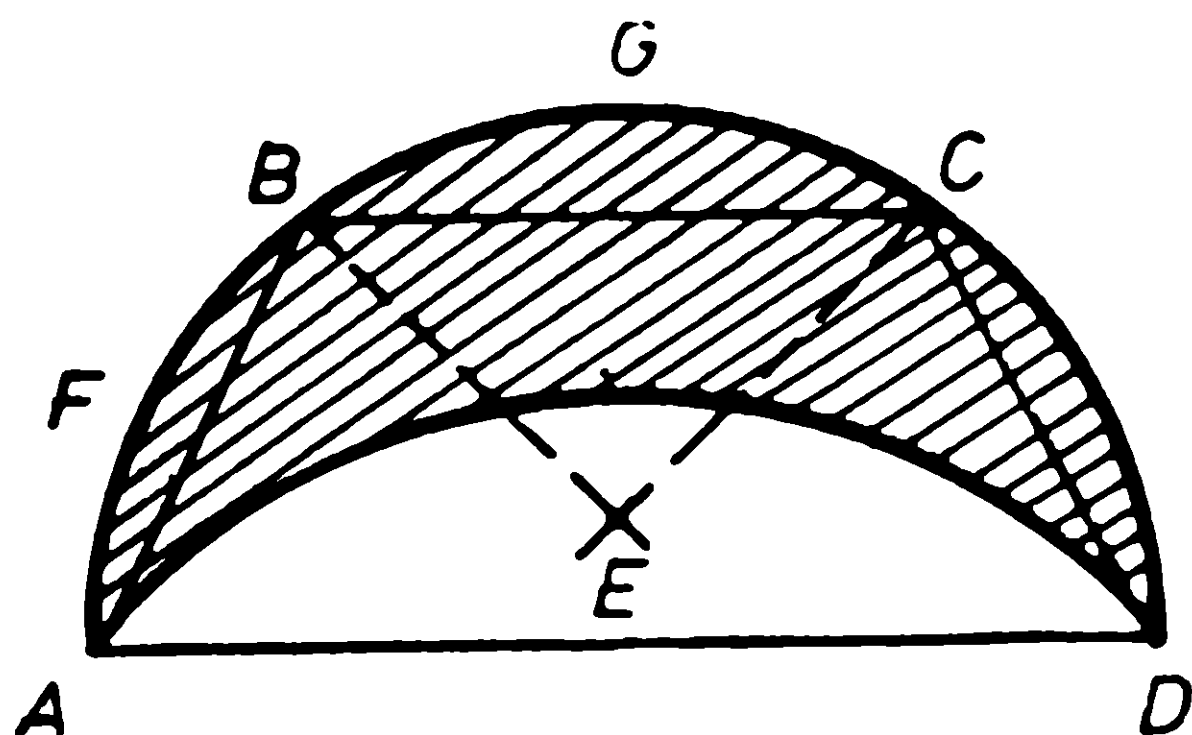


Fig. 1.

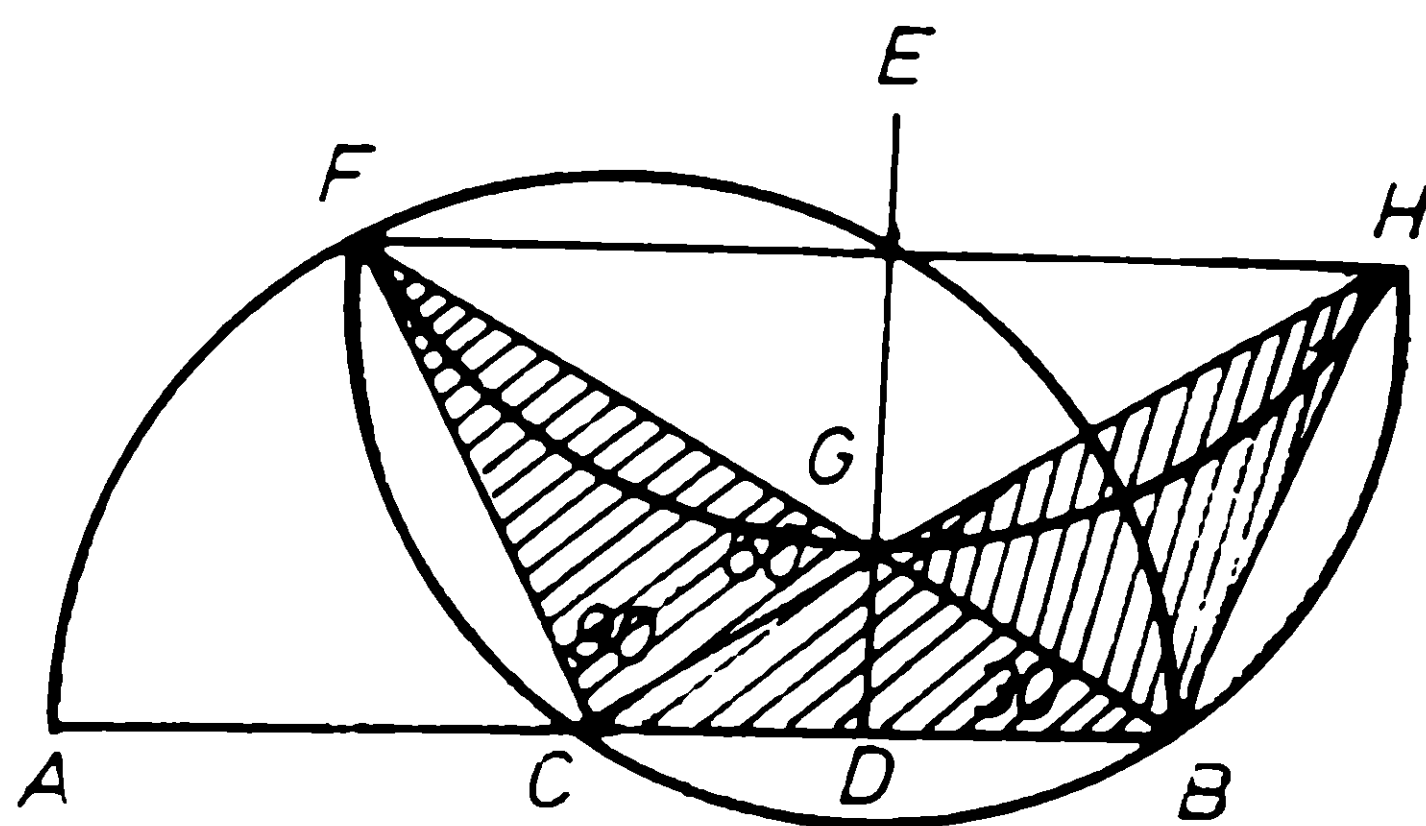


Fig. 2.

c) aria lunulei $FCBH$ este egală cu aria pentagonului $FCBHG$.

Hipocrate din Chios

81. În semicercul cu diametrul AB se înscrie trapezul $ABCD$, astfel încît $AC=CD=DB=\frac{1}{2}AB$.

Apoi, pe coardele AC , CD și DB se construiesc semicercuri.

Atunci suma ariilor celor trei lunule egale, împreună cu aria unuia din cele trei semicercuri va fi egală cu aria trapezului.

Hipocrate din Chios

82. Să se rezolve problema duplicării cubului, folosind o dublă proporție geometrică.

Hipocrate din Chios

83. Pe diametrul unui semicerc AB se construiesc în interior alte două semicercuri care închid între ele o figură numită arbelos (cuțitul curbat al cizmarului). Să se arate că aria acestei figuri este egală cu aria cercului al cărui diametru este egal cu semicoarda perpendiculară pe AB și tangentă la cele două semicercuri interioare.

Arhimede

84. „Modul de calcul al piramidei fără vîrf: dacă ți se dă o piramidă fără vîrf de 6 (coturi) în înălțime, 4 (coturi) pe latura inferioară și 2 pe latura superioară”, care este volumul?

(Problema 14 din papyrusul egiptean de la Moscova)

R. „Se calculează cu acest 4 ridicînd la pătrat, se obține 16; dublează pe 4, se obține 8; calculează cu acest 2, ridicînd la pătrat, se obține 4 (1); adună împreună acești 16 (2) cu acești 8 și cu acești 4 (3), se obține 28.

Calculează (4) $\frac{1}{3}$ din 6, se obține 2; calculează (5) 28 de două ori, se obține 56 (6); vezi: ea va fi 56. Ai găsit corect“.

* * *

85. Există un sian-ciu (fig. 3). Lățimea de jos este de 6 ci, lățimea de sus, 1 cijan (=10 ci), adîncimea, 3 ci, lățimea de sus 8 ci, adîncime nu are, lungimea de 7 ci. Se întreabă care este volumul.

Liu Huei

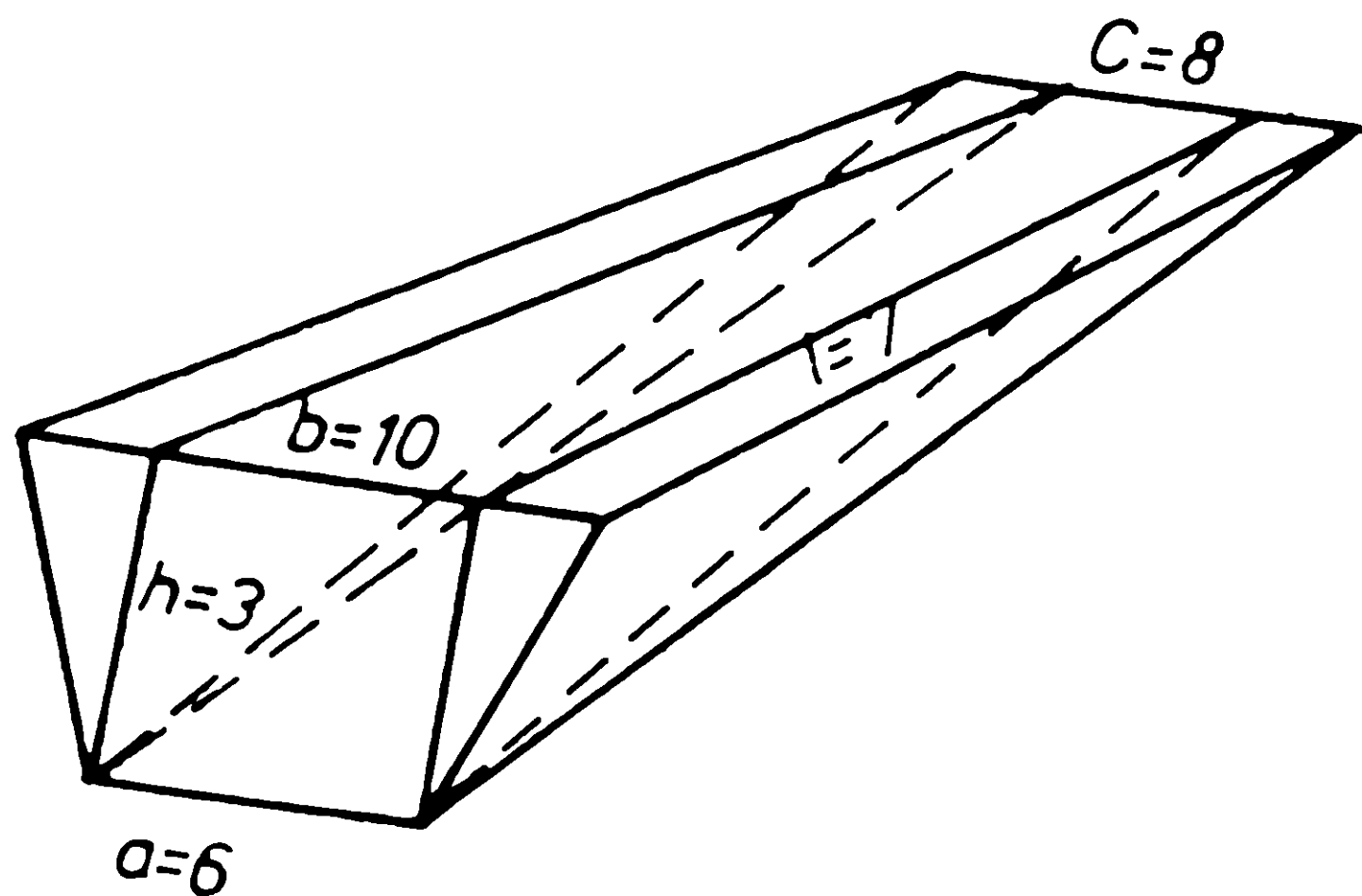


Fig. 3.

Corpul despre care se vorbește este prezentat în figura 3 unde $a=6$, $b=10$, $c=8$, $l=7$, $h=3$.

Regula prin care se indică modul cum se obține volumul este lăconică: „Adună (toate) trei înălțimile, înmulțește cu adîncimea, mai înmulțește cu lungimea, împărțind la 6, ia o dată.“

La baza rezolvării stă descompunerea corpului într-o prismă dreaptă cu baza triunghiulară (catetele l , h) și înălțimea a și două piramide de aceeași mărime și de înălțime h , la baza cărora se află un trapez cu laturile $\frac{b-a}{2}$, $\frac{c-a}{2}$ și înălțimea l .

Regula $V = \frac{(a+b+c) \cdot l \cdot h}{6}$ presupune unele transformări pentru exprimaarea volumelor prisme prin $\frac{1}{2} h \cdot l \cdot a$ și a piramidelor prin $2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{b-a}{2} + \frac{c-a}{2} \right) \cdot l \right] \frac{h}{3}$.

86. „Frumoasa mea fiică (Lilavati)¹, tu care cunoști metoda inversiunii, ia un număr pe care îl înmulțești cu 3, produsul îl mărești cu trei pătrimi din el, pe acesta îl împarți cu 7, îl micșorezi apoi cu o treime, pe acesta îl multiplici cu el însuși, rezultatul îl micșorezi cu 52, iar după extragerea rădăcinii pătrate, îi aduni 8, rezultatul îl împarți la 10 și găsești 2”.

Bhaskara II (sec. XII)

87. Problema fîntînilor.

Sînt patru fîntîni: prima umple un bazin într-o zi, a doua în două zile, a treia în trei zile și a patra în patru zile. În cît timp ar umple bazinul toate fîntînile?

Heron din Alexandria

88. Un negustor a trecut prin trei orașe; în primul oraș, i-au luat drept vamă jumătate plus o treime din banii pe care-i avea; în al doilea, jumătate plus o treime (din ceea ce i-a rămas); iar în al treilea i-au luat din nou jumătate plus o treime (din ce mai avea). Cînd a ajuns acasă, îi rămăsese 11 dahecani (unități monetare).

Și, acum, aflați cîți dahecani a avut la început negustorul.

Anania din Șirak

89. Faraonul, regele Egiptului, își serba ziua nașterii. El avea obiceiul de a împărți în această zi la zece dregători, după meritele fiecăruia, o sută de vase cu vin.

Împarte-le, așa dar, după meritele fiecăruia!

(Sensul cuvintelor „după meritul fiecăruia” este că raportul între partea primului și cea a celui de al doilea este egal cu 1 : 2, partea celui de al doilea față de al treilea este 2 : 3 ș.a.m.d.)

Anania din Șirak

90. În orașul Atena era un bazin de apă la care duceau trei conducte. Una din ele putea să umple bazinul într-o oră, alta — mai subțire — în două ore, iar a treia — și mai subțire — în trei ore. Află, acum, într-a cîta parte dintr-o oră îl pot umple toate trei conductele.

Anania din Șirak

91. Policrate, tiranul Siracuzei, îl întreabă într-o zi pe Pitagora:

— O, Pitagora, gloria Heliconului și răsfățatul Muzelor! Spune-mi cîți discipoli frecventează școala ta? Cîți lacomi de știință ascultă aproape de tine înțelepciunile învățătorului?

— Iată, Policrat, întipărește-ți adînc în mintea ta ceea ce îți voi spune: o jumătate studiază frumoasele științe ale matematicii, știința lumii și adevărului; un sfert lucrează să descopere legile nemuritoare care guvernează natura; a șaptea parte meditează în tăcere asupra tuturor celor ce ascultă; în afară de aceștia mai sînt încă 3 femei.

Cîți bărbați erau în școala lui Pitagora?

(Problemă antică)

¹ Fată frumoasă, cu ochi scînteietori.

92. Un locuitor al Romei antice, aflându-se pe patul de moarte și știind că soția lui va naște un copil, a lăsat un testament în care se prevedea:

„De se va naște un băiat, să i se dea $\frac{2}{3}$ din averea rămasă, iar restul de $\frac{1}{3}$ să fie al mamei sale; iar de se va naște o fată, aceasta va dobîndi doar $\frac{1}{3}$ din avere și mama va lua $\frac{2}{3}$ “. Dar văduva testatorului a născut doi gemeni — un băiat și o fată. Și acest caz nu era prevăzut în testament.

Cum trebuia, deci, împărțită averea între cei trei moștenitori, astfel ca să se țină cît mai mult seama de prevederile testamentului?

Salvius Iulianus

93. Trîntorul, fugind de muncă, făcu următoarea învoială cu . . . „dra-cul:“ De cîte ori va trece „*puntea fermecată*“ peste un pîrîu, i se va dubla suma de bani pe care o are sau o va avea în buzunar.

De fiecare dată însă, va trebui să-i dea „*întunecimii sale*“ 24 din bănuții săi pentru sfatul lui cel bun . . .

. . . Dar la a treia trecere, trîntorul observă, că mai avea exact 24 de bănuți, pe care a trebuit să-i dea drăcușorului care, izbucnind în hohote de rîs, se făcu nevăzut.

Cîți bani a avut trîntorul la început?

. . .

94. Un arab moare și lasă celor trei fii ai săi ca moștenire 17 cămile. Testamentul prevede ca fiul cel mare să ia $\frac{1}{2}$ din avere, al doilea să ia $\frac{1}{3}$, iar al treilea $\frac{1}{9}$.

Moștenitorii nu s-au putut înțelege între ei. Primul a cerut să i se dea 9 cămile, iar ceilalți au obiectat că o jumătate din 17 face mai puțin ca 9; al doilea a cerut 6 cămile, deși a treia parte din 17 face mai puțin ca 6; tot așa și al treilea.

Au ajuns la judecată. Judecătorul le-a spus:

— Vă dăruiesc de la mine o cămilă, ca toată lumea să fie mulțumită. El așeză cămila sa lîngă cele 17 cămile.

Primul fiu luă $18 : 2 = 9$ cămile; al doilea luă $18 : 3 = 6$ cămile, iar al treilea $18 : 9 = 2$ cămile.

În total, ei au luat $9 + 6 + 2 = 17$ cămile, iar judecătorul și-a luat înapoi cămila pe care le-o dăruise.

Astfel toată lumea a fost mulțumită, fiecărui moștenitor i s-a dat mai mult decît i se cuvenea.

Cum a fost posibil acest lucru?

Cum ar fi putut proceda judecătorul în cazurile următoare:

a) Sînt 14 cămile, 2 moștenitori și testamentul prevede ca un moștenitor să ia $\frac{1}{3}$, iar celălalt $\frac{3}{5}$.

b) Sînt 59 de cămile, trei moștenitori și testamentul prevede ca unul să ia $\frac{1}{3}$, al doilea $\frac{1}{4}$, iar ultimul $\frac{2}{5}$.

c) Sînt 20 de cămile, 4 moștenitori și testamentul prevede ca părțile să fie de $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{10}$ și $\frac{3}{20}$

d) Sînt 12 cămile, 3 moștenitori și testamentul prevede ca ei să ia respectiv $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ și $\frac{1}{4}$.

. . .

95. Un turc fură din grădina sultanului un coș cu mere. La ieșire îl întâmpină un prim paznic, care-l lasă să treacă după ce turcul îi dă o jumătate din numărul merelor, plus două.

Unui al doilea paznic trebuie să-i dea, iar, jumătate din numărul merelor rămase, plus două. În fine, al treilea și ultimul paznic cere și obține și el jumătate din numărul merelor rămase în coș, plus două. La urmă, turcul nostru se trezește cu un singur măr. Cîte mere a trebuit să fure turcul, ca să poată mânca și el un măr?

• • •

96. Pe piatra funerară de pe mormîntul lui Diofante (matematician grec din veacul al doilea e.n.), se găsește inscripția:

„Aici este înmormîntat Diofante și piatra de pe mormîntul său îți arată cît a trăit:

A șasea parte din viață o formează copilăria minunată; tinerețea luminoasă este egală cu a douăsprezecea parte. După încă a șaptea parte s-a căsătorit, iar cinci ani după aceea, Himeneu i-a trimis un fiu, căruia soarta i-a dat să trăiască numai jumătate din cît a trăit tatăl.

În mare mîhnire a murit bătrînul la patru ani după ce i-a murit fiul“.
Spuneți-mi cîți ani a avut Diofante cînd a murit?

• • •

97. Un arab lasă fiilor săi următorul testament:

Din toate cămilele mele, fiul meu cel mare să ia o cămilă și $\frac{1}{5}$ din rest. După ce își va lua partea i se cuvine, să vină fiul al doilea, să ia două cămile și $\frac{1}{5}$ din rest. După ce și acesta își va fi luat partea ce i se cuvine, să vină fiul al treilea, să ia trei cămile și $\frac{1}{5}$ din rest . . . ș.a.m.d. pînă se termină toate cămilele.

Cînd au luat cunoștință de conținutul testamentului, toți fiii, afară de primul, și-au exprimat nemulțumirea că tatăl lor nu a avut aceeași dragoste pentru toți copiii. Mai ales cel mai mic considera că lui îi va rămîne foarte puțin. Dar, de fapt, arabul împărțise cămilele în părți egale.

Să se afle:

a) Cîți fii și cîte cămile a avut arabul?

b) Care ar fi redactarea testamentului în cazul cînd arabul are 3 moștenitori, 5 moștenitori, 6 moștenitori ș.a.m.d.?

Să se întocmească un testament asemănător pentru cazul cînd sînt $8 \cdot 5 = 40$ cămile și 5 fii.

• • •

98. Împărțirea cerealelor.

Se cere ca 100 măsuri de cereale să fie împărțite între 5 oameni astfel, încît cel de-al doilea să primească mai mult decît primul cu atît cu cît cel de-al treilea a primit mai mult decît cel de-al doilea, cel de-al patrulea mai mult decît cel de-al treilea, iar cel de-al cincilea mai mult decît cel de-al patrulea.

Afară de aceasta, primii doi trebuie să primească de 7 ori mai puțin decît următorii trei.

(Papirusul egiptean *Rhind*)

99. Într-o zi Bacchus, văzînd că Sileniu dormea profund, își luă cupa și se așază fără jenă în pivniță, lîngă o amforă plină cu vin vechi, pe care Sileniu îl păstra pentru zile festive.

El bău un timp de trei ori cît zecimea timpului pe care l-ar fi întrebuițat singur Sileniu pentru a goli amfora.

Cînd sosi Sileniu, înecă nemărginitul său necaz în restul vinului. Cînd se goli amfora, cu regret văzu Bacchus că partea sa nu fusese decît un sfert din aceea a lui Sileniu.

Dacă de la început ar fi băut împreună, fiecare bînd în felul său, se spune că ar fi fost necesare opt sferturi de oră mai puțin pentru a goli amfora. Cum s-o fi aflat aceasta, nu se știe.

Să se afle timpul, pe care fiecare dintre ei l-ar fi pus separat, ca bînd singur în felul său, să golească toată amfora.

• • •

100. Pe o petală a florii cadamba s-a așezat a cincea parte a unui grup de albine. Alături de ea creștea simenda, toată înflorită; pe ea s-a așezat a treia parte din numărul albinelor.

Găsește diferența lor, adună de trei ori și așază albinele pe floarea cutai. Numai o albină nu-și găsește loc nicăieri, zboară încolo și înapoi și miroase parfumul florilor.

Socotește în minte și spune-mi acum cîte albine s-au strîns aci în total!

Bhaskara (1114 e.n.)

101. „Pe o cîmpie, două turnuri se găsesc la distanța de 60 coți unul de celălalt. Înălțimea unuia este de 50 de coți, a celuilalt de 40 coți. Între cele două turnuri se află un puț la o depărtare egală de vîrfurile lor.

Găsește cît de departe se află puțul de baza fiecărui turn”.¹

(Dintr-un manuscris vechi, 1200)

102. Un număr de albine, egal cu rădăcina pătrată din jumătatea întregului roi, s-a așezat pe o tufă de iasomie, lăsînd în urma lor $\frac{8}{9}$ din roi. Numai o singură albină se învîrtește în jurul unui lotus, fiind atrasă de zumzetul prietenei ei, care a fost prinsă în cursa florii mirositoare. Cîte albine cuprindea roiul?

Bhaskara (1114 e.n.)

103. Pe marginea unui pîrîu cu lățimea egală cu 4 unități de lungime, creștea un plop. O furtună a rupt plopul la înălțimea de 3 unități de lungime de la pămînt și copacul a căzut perpendicular pe direcția pîrîului, proptindu-se de marginea malului opus. Ce înălțime avea plopul?

• • •

104. A cincea parte din numărul unor maimuțe micșorată cu 3 și ridicată la pătrat s-a ascuns într-o peșteră, iar o maimuță, care s-a urcat într-un pom, a fost văzută.

Cîte maimuțe au fost laolaltă?

• • •

¹ Variantă a problemei 34.

105. O floare de lotus se înălța deasupra suprafeței unui lac cu distanța de 4 picioare; sub bătaia vîntului, floarea și-a ascuns vîrfurile în lac, depărtîndu-se pe suprafața apei la distanța de 16 picioare de la locul unde era înainte.

Ce adîncime avea lacul?¹

• • •

106. Pentru Heron, tiranul din Siracuză, s-a făcut o coroană de aur de 12 funturi. Heron, bănuindu-l pe meșter, a poruncit lui Arhimede să cerceteze, dacă nu s-a pus în coroană mai mult argint decît aur. Cum credeți că ar fi procedat Arhimede, pentru a determina cît argint și cît aur curat a fost în coroană?

• • •

Răspuns. Cunoscînd ingeniozitatea lui Arhimede și principiul lui (după care „*fiecare corp solid scufundat într-un lichid pierde din greutatea sa atît cît cîntărește volumul de lichid dezlocuit*”), se poate trage concluzia, că el a poruncit să se pregătească o bucată de aur curat și o bucată de argint curat, fiecare avînd aceeași greutate cu coroana și cîntărindu-le pe rînd în apă a găsit că aurul curat „a pierdut” în apă 19 loturi (1 funt=32 loturi); iar argintul curat „a pierdut” în apă $28\frac{1}{2}$ loturi.

Apoi, cîntărind și coroana în apă, găsește că aceasta „a pierdut” din greutatea ei $21\frac{1}{4}$ loturi.

În sfîrșit, socotind ce a pierdut aurul și ceea ce a pierdut argintul ca lucruri care se amestecă, iar ceea ce a pierdut în greutate coroana sînt numai 9 funturi $5\frac{1}{19}$ loturi aur curat și că s-au pus în amestec 2 funturi $26\frac{18}{19}$ loturi argint.

Cum se calculează aceasta?

• • •

107. Într-o cușcă se află iepuri de casă și fazani; în total sînt 100 de picioare și 36 de capete. Sînt mai mulți iepuri ori fazani și cu cît?

• • •

108. *Problemă referitoare la furtul orezului.*

Din trei butoaie de orez de aceeași calitate, trei hoți au furat o cantitate oarecare de orez. Cantitatea totală era necunoscută, dar s-a constatat că în primul butoi a rămas 1 „go” de orez, în al doilea butoi au rămas 1 „șing” și 4 „go”, iar în cel de al treilea butoi, — 1 „go”.

Hoții prinși au arătat următoarele: primul, că el a scos orezul din primul butoi cu ajutorul unei lopeți; cel de-al doilea hoț a arătat că el a folosit un papuc de lemn; al treilea hoț a arătat că el a folosit un lighean, iar aceștia doi din urmă au luat, respectiv, din butoiul al doilea și al treilea.

¹ Variantă a problemei 37.

Lopata, papucul și ligheanul au fost găsite pe locul delictului. Măsurându-se capacitatea lor, s-a constatat că lopata avea 1 șing și 9 go; papucul-1 șing și 7 go; ligheanul-1 șing și 2 „go”. Trebuie să se afle cât a furat fiecare hoț, știindu-se că $10\text{ go}=1\text{ șing}$, $10\text{ șing}=1\text{ tao}$, $10\text{ tao}=1\text{ și}$.

(Aritmetica în nouă capitole)

109. Problema referitoare la orașul înconjurat de zid.

„Orașul este înconjurat de un zid rotund cu două porți, una spre nord și alta spre sud. Dacă ieșim prin poarta de nord și mergem spre nord, după 300 de pași vom ajunge la un copac mare. Dacă ieșim pe poarta dinspre sud și mergem spre vest, atunci același copac poate fi văzut după 900 de pași.

Să se spună cu câți pași este egal profilul transversal al orașului“.

Cin-Sei-Sao (sec. al XVIII-lea)

110. „Trei snopi de cereale de prima calitate, împreună cu doi snopi de calitate a doua și cu un snop de calitate a treia, constituie 39 de măsuri, doi snopi de cereale de calitate întâia cu trei de calitate a doua și cu unul de calitate a treia constituie 34 de măsuri; în sfârșit, un snop de calitate întâia cu doi de calitate a doua și cu trei de calitate a treia constituie 26 de măsuri.“

Cîte măsuri are fiecare snop?

(Aritmetica în nouă capitole)

111. O cerere „modestă“.

— „Stăpîne, spunea vizirul Sessa Ebn Daher, presupusul descoperitor al jocului de șah, adresându-se împăratului indian Sherham, care voia să-l recompenseze pentru minunata lui invenție, să-mi dai atâtea boabe de grâu cîte s-ar cuveni să fie așezate pe tabla de șah în felul următor:

În primul compartiment al tablei de șah, o boabă de grâu, în fiecare compartiment următor de două ori atâtea boabe cîte au fost în compartimentul dinaintea“

— „Ei bine, spuse împăratul mirat de modestia acestei cereri, care ar fi numărul boabelor de grâu necesare?“

„Să calculăm! răspunse vizirul.“

Dar, cum vizirul de mult „s-a făcut oale și ulcele“, calculați dvs.!

• • •

112. „Leul a mâncat o oaie într-o oră, lupul în două ore, iar cîinele în trei ore. Dacă toți trei — leul, lupul și cîinele — au mâncat o oaie împreună, în cît timp au mâncat oaia? Socotește.“

(Din primele izvoare rusești)

113 Salariul lui Nureddin.

Maharajahul de Bassora, vrînd să angajeze ca matematician al curții pe cabalistul și matematicianul Nureddin, i-a cerut acestuia să-și fixeze salariul.

Nureddin a acceptat și și-a fixat ca salariu pentru prima zi a lunii cea mai mică monedă indiană (care ar corespunde cu banul nostru) pentru a doua

zi două monede, pentru a treia zi 4 monede și așa mai departe, numărul mone-
delor dublându-se în fiecare zi.

Maharajahul rămase uimit de modestia învățatului. Și nu mică i-a fost
surprinderea la sfârșitul lunii, când ministrul său de finanțe i-a arătat că sala-
riul lui Nureddin se ridică la o sumă prea mare. Ce salariu lunar își fixase
Nureddin?

• • •

114. După o legendă, conducătoarea poporului ceh, Liubușa, a hotărît
să se mărite cu acela care va dezlega următoarea problemă:

*„Dintr-un coș cu prune, am dat primului pretendent jumătate din toate
prunele și încă una; celui de-al doilea, jumătate din rest și încă una; celui de-al
treilea, jumătate din noul rest și încă 3 prune, după care n-a mai rămas nimic
în coș.*

Cîte prune au fost în coș?”

• • •

115. Un cal și un catîr păseau alături, avînd fiecare în spate cîte o
povară. Calul se văita de greutatea poverii sale.

*„De ce te vâiți?” l-a întrebat catîrul. „Dacă aș lua de la tine un sac,
povara mea ar deveni de două ori mai grea decît a ta. Iar dacă tu ai lua un sac
de pe spinarea mea, povara ta ar deveni egală cu a mea.”*

Spuneți, matematicieni înțelepți, cîți saci ducea calul și cîți catîrul?

• • •

116. Doi oameni au pornit din același punct, în același sens, să înconjoare
un oraș; unul dintre ei a făcut cîte 4 verste pe oră, iar al doilea, cîte $3\frac{1}{3}$ verste
pe oră; lungimea drumului împrejurul orașului era de 15 verste; se întrebă:
după cîte ore s-au întîlnit ei din nou și de cîte ori a înconjurat fiecare orașul?

(Din *Aritmetica* lui Magnițki, 1703)

117. Un om a fost trimis de la Moscova la Vologda și i s-a poruncit
să facă în fiecare zi cîte 40 de verste. În ziua următoare, a fost trimis alt om
în urma lui și acestuia i s-a poruncit să facă cîte 45 verste pe zi.

După cîte zile drumețul al doilea îl va ajunge pe primul?

(Din *Aritmetica* lui Magnițki, 1703)

118. Cineva a vîndut un cal cu 156 ruble. Dar cumpărătorul s-a răz-
gîndit și a restituit vînzătorului calul, spunîndu-i:

— Nu-mi convine să cumpăr calul la acest preț, nu face atîția bani!
Atunci vînzătorul i-a propus alte condiții:

— Dacă găsești că prețul pentru cal este prea mare, atunci cumpără
numai caielele de la potcoavele calului; în acest caz, calul îl vei primi pe gratis.
Fiecare potcoavă are 6 caiele. Pentru prima caia îmi vei da $\frac{1}{4}$ copeică, pentru
a doua, $\frac{1}{2}$ copeică, pentru a treia, 1 copeică etc.

Cumpărătorul, ispitit de prețul mic al caielelor și în dorința de a obține calul gratis, a acceptat condițiile vânzătorului, socotind că pentru caiele nu va plăti mai mult de 10 ruble.

Cu cât s-a înșelat cumpărătorul?

(Din *Aritmetica* lui Magnițki, 1703)

119. Un om bea un butoiăș de băutură în 14 zile, iar cu nevasta bea același butoiăș în 10 zile și vrem să știm în câte zile bea nevasta singură același butoiăș?

(Din primele izvoare rusești)

120. Un om a angajat un lucrător pe un an și i-a făgăduit să-i dea 12 ruble și un caftan. După 7 luni, lucrătorul s-a hotărît să plece și a cerut plata pentru lucru. Stăpînul i-a dat 5 ruble și caftanul. Se întreabă care este prețul caftanului?

(Din *Aritmetica* lui Magnițki, 1703)

121. La întrebarea cîți oameni are sub comanda sa, un căpitan a răspuns că $\frac{2}{5}$ din oameni sînt de gardă, $\frac{2}{7}$ lucrează, $\frac{1}{4}$ este la infirmerie și 27 sînt de față.

Cîți oameni avea căpitanul sub comanda lui?

(Din *Cursul de matematică pură*, Efim Voitiakovski, 1811)

122. Un măgar tînăr și unul bătrîn duceau burduri cu vin. Măgarul bătrîn a obosit așa de mult, încît n-a putut să meargă mai departe. Văzînd aceasta, măgarul tînăr i-a spus:

„De ce ai obosit așa de repede, doar duci mai puțin vin decît mine; pentru că dacă aș muta o vadră de vin din burduful meu într-al tău, am avea amîndoi aceeași cantitate de vin. Dar eu nu vreau să fac aceasta. Toarnă, deci, tu o vadră de vin din burduful tău în al meu și atunci eu voi avea de două ori mai mult ca tine“. Se întreabă cîte vedre de vin ducea măgarul tînăr și cîte măgarul¹ bătrîn?

(Din *Aritmetica teoretică și practică*, Dimitrii Anicikov, 1793)

123. La întrebarea: cît e ceasul? cineva a răspuns: $\frac{2}{5}$ din orele trecute de la miezul nopții pînă acum sînt egale (cu) $\frac{2}{3}$ din cele rămase pînă la amiază.

Se întreabă cît era ceasul atunci?

(Din *Cursul de matematică pură*, Efim Voitiakovski, 1811)

124. Doi oameni au vrut să cumpere un obiect. Unul a spus celuilalt: dă-mi $\frac{2}{3}$ din toți banii pe care-i ai și atunci eu singur voi plăti obiectul; al doilea a răspuns celui dintîi: dă-mi $\frac{3}{4}$ din toți banii pe care-i ai și voi plăti eu singur obiectul. Obiectul costa 38 ruble.

Se întreabă: ce sumă a avut fiecare din ei?

(Din *Aritmetica* lui Magnițki, 1703)

¹ Variantă a problemei 115.

125. Într-un document din 1635 găsim: „*Din jumătate de jumătate + a treia parte din a patra parte jumătate*“.

La cât revine acea parte?

• • •

126. Într-un document vechi, pentru împărțire de pământuri noi, se găsesc scrise următoarele:

„*Din satul Cîrligii, din jumătatea satului din a treia parte a șasea parte*“.

A cita parte din sat face acea porțiune?

• • •

127. Pentru serviciile aduse patriei, un ostaș a primit o răsplată: prima rană o copeică; pentru a doua, 2 copeici; pentru a treia, 4 copeici etc. Făcîndu-se calculul, s-a dovedit că ostașul a primit în total suma de 655 ruble și 35 de copeici.

Se întreabă cîte rani a avut ostașul?

(Din *Cursul de matematică pură*, Efim Voitiakovski, 1811)

128. Un om a venit la magazin și a cumpărat jucării pentru copii: pentru prima jucărie, el a plătit $\frac{1}{9}$ din toți banii săi; pentru jucăria a doua, $\frac{3}{7}$ din ce i-a rămas după ce a cumpărat prima jucărie; pentru a treia jucărie, el a plătit $\frac{3}{5}$ din ceea ce i-a rămas după cumpărarea jucăriei a doua. Întors acasă, a găsit în pungă 1 rublă și 92 copeici. Vezi, cîți bani a avut la început și cât a plătit pentru fiecare jucărie.

(Din *Cursul de matematică pură*, Efim Voitiakovski, 1811)

129. *Cinci pîini.*

Cică doi drumeți au poposit lîngă o fîntînă; unul a scos din traistă 3 pîini, iar celălalt, 2. Cînd au început să mănînce, a sosit un al treilea drumeț și le-a cerut să-i dea și lui să mănînce și ei l-au primit și au mîncat toate cele 5 pîini. Străinul le-a dat 5 lei, le-a mulțumit și a plecat. Acum urma ca primii doi drumeți să-și împartă banii.

Cel care avusese 3 pîini a oprit pentru el 3 lei și a dat celuilalt 2 lei. Cel care avusese 2 pîini a fost nemulțumit și a cerut să se împartă în părți egale.

Au ajuns la judecată. Judecătorul le-a spus așa:

— Să împărțim fiecare pîine în 3 părți egale. Vor fi $5 \cdot 3 = 15$ părți. Fiecare din voi a mîncat $15 : 3 = 5$ părți. Din cele 3 pîini ale primului, s-au făcut $3 \cdot 3 = 9$ părți. El însuși a mîncat 5 părți, iar prisosul de 4 părți l-a mîncat străinul.

Din cele 2 pîini ale celuilalt s-au făcut $2 \cdot 3 = 6$ părți; el însuși a mîncat 5 părți, iar prisosul de 1 bucată l-a mîncat străinul. Deci primul drumeț trebuia să ia 4 lei, iarcel de-al doilea numai 1 leu.

(Ion Creangă, într-una din povestirile sale)

Cum trebuie împărțiți banii atunci cînd:

a) un drumeț are o pîine, iar celălalt are 2 pîini;

b) unul are 3 pîini, celălalt are 4 pîini, iar străinul le dă 7 lei;

- c) unul are o pîine, celălalt are 3 pîini, iar străinul le dă 4 lei;
d) de la început sînt trei drumeți care au: 3 pîini, 4 pîini și 5 pîini, iar străinul le dă 3 lei.

* * *

130. O problemă încurcată.

„Avînd de vînzare 90 de ouă, o precupeață a trimis la tîrg pe cele trei fiice ale sale, dînd celei mai mari și mai înțelepte dintre ele 10 ouă, celei mijlocii — 30 de ouă, iar celei mai mici, 50 de ouă.

Ea le spuse: — Înțelegeți-vă dinainte cu privire la prețul cu care să vindeți ouăle și să nu vă abateți de la această înțelegere; să vindeți toate cu unul și același preț; însă eu nădăjduiesc că fiica mea cea mai mare, fiind că este cea mai înțeleaptă, va reuși să capete pentru cele 10 ouă ale sale tot atîția bani cît va căpăta cea mijlocie pentru 30 de ouă și o va învăța și pe aceasta să capete pentru cele 30 de ouă ale sale tot atît va căpăta fiica cea mică pentru 50 de ouă, deși toate veți vinde cu același preț.

Vreau ca toate trei să căpătați aceeași sumă de bani. Aș mai vrea să vindeți toate ouăle astfel încît să nu luați mai puțin de 90 de copeici pentru toate cele 90 de ouă.“

Cum trebuie să procedeze?

V. G. Benediktov¹

131. Problemă cehoviană.

Un negustor a cumpărat 138 arșini de stofă neagră și de stofă albastră cu 540 ruble. Cîți arșini a cumpărat el din fiecare, dacă stofa albastră a costat 5 ruble arșinul, iar cea neagră, 3 ruble?

(A. Cehov, în povestirea *Meditatorul*)

132. Un țăran trebuia să treacă peste o apă un lup, o varză și o capră. Avea la îndemînă o barcă în care nu încăpea decît el împreună cu unul din cele două animale sau cu varza.

Dacă rămîneau pe mal lupul și capra, atunci lupul devora capra; dacă rămîneau capra și varza, atunci capra mîncea varza.

În prezența omului, „*nimeni nu mîncea pe nimeni*“. Omul nostru a izbutit, totuși, să-i treacă pe toți trei peste apă.

Cum a procedat țăranul?

Albinus Flacus (Alk-win)

133. Zbura un cîrd de gîște; în întîmpinarea lor zboară un gîscan și spune:

— Bună ziua, o sută de gîște!

— Noi nu sîntem o sută, îi răspunde una mai isteată. Dacă am fi atîtea cîte sîntem acum și încă o dată pe atît și încă jumătate din cîte sîntem și încă un sfert din cîte sîntem și cu tine, am fi o sută. Cîte gîște erau în cîrd?

* * *

¹ Autorul primei culegeri de probleme distractive în limba rusă.

134. Problema triunghiului dreptunghic.

Să se determine laturile triunghiului dreptunghic, dacă este cunoscută aria și perimetrul.

(Matematica în nouă cărți)

135. În timp ce cîinele face 2 sărituri, iepurele face 3; iar 5 sărituri de-ale iepurelui fac cît 2 de-ale cîinelui.

Cîte sărituri trebuia să facă un cîine pentru a ajunge un iepure care este la 75 sărituri în fața lui?

Albinus Flacus (Alk-win)

136. Un ogar urmărește o vulpe, care are 60 sărituri înaintea lui. Să se afle peste cîte sărituri ogarul va ajunge vulpea, știind că, pe cînd ogarul face 6 sărituri, vulpea face 9, dar că 3 sărituri ale ogarului fac cît 7 sărituri ale vulpii.

• • •

137. Un cîine aleargă după un cal. Cîinele face 6 sărituri în timpul în care calul face numai 5 și, făcînd 4 sărituri, cîinele parcurge distanța pe care o face calul prin 7 sărituri. Cînd cîinele a început să alerge în urma calului, acesta avea un avans de 55 prăjini.

Ce distanță va mai putea parcurge calul pînă ce îl va ajunge cîinele?

• • •

2. Probleme captivante

Sînt probleme care s-ar putea numi tot atît de bine: „probleme alese“, „probleme frumoase“ sau „probleme interesante“.

Prin indicarea autorului sau a problemei deosebite care se pune, ele captează şi mai mult atenţia noastră, cu o invitaţie irezistibilă pentru a ne încerca şi noi forţele în găsirea soluţiei.

Căci rezolvarea unei probleme deosebite este răsplătită din plin cu satisfacţii spirituale, cum numai în basmele, în care Făt-Frumos le venea de hac iazmelor, puteam întîlni.

1. Problema Didonei.

Legenda spune că Didona, fiica regelui din Tyr, a fugit, ajungînd în locul care avea să devină, datorită ei, celebra cetate a Cartaginei.

A cerut pămînt. Localnicii, în derîdere, i-au făgăduit atît pămînt cît poate să acopere o piele de taur.

Didona a tăiat pielea într-o fîşie foarte îngustă şi deci foarte lungă şi a înconjurat cu ea un loc destul de mare ca să clădească pe el o cetate.

Socotind că din pielea taurului s-ar fi scos 1 000 de şuviţe lungi de cîte 2 metri, găsiţi cît pămînt şi-a luat Didona. Ce formă trebuia să aibă terenul înconjurat, pentru ca suprafaţa să fie maximă?

2. Cineva vinde doi cai cu şei; o şa valorează 120 ruble, iar cealaltă 25 ruble. Primul cal împreună cu şaua bună este de trei ori mai scump decît calul al doilea împreună cu şaua cea ieftină; iar calul al doilea împreună cu şaua bună este de două ori mai ieftin decît primul cal cu şaua ieftină.

Să se afle preţul fiecărui cal.

(Din *Cursul de matematică pură*, Efim Voitiakovski, 1811)

3. . . . În prima zi de drum, sania în care călătorea Jack London a mers cu viteza prevăzută de acesta.

La un scurt popas, doi din cei cinci cîini, care o trăgeau, au ros hamurile şi s-au luat după o haită de lupi.

A doua zi, London a trebuit să continue drumul cu 3 cîini, care trăgeau sania cu o viteză de $\frac{3}{5}$ din viteza inițială și a sosit la destinație cu două zile mai tîrziu.

Dacă cei doi cîini fugiți ar fi tras sania încă 50 de mile, el nu ar fi întîrziat decît o zi față de termenul fixat.

Care era distanța de străbătut?

• • •

4. Trei drumeți au intrat într-un han și au cerut să li se pregătească niște cartofi.

Între timp, au adormit.

Primul care s-a trezit a mîncat a treia parte din cartofii de pe masă și s-a culcat iarăși. Cînd s-a trezit al doilea, crezînd că este primul care mănîncă, a mîncat a treia parte din cartofii rămași și s-a culcat din nou.

În sfîrșit, cînd s-a trezit al treilea drumeț, a mîncat și el a treia parte din cartofi și a adormit.

Dimineața, s-au lămurit.

Pe masă mai erau 8 cartofi.

Cîți cartofi au fost la început pe masă și cît mai are fiecare dreptul să mănînce?

• • •

5. „O problemă grea“, — problema lui S. A. Racinski.

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365} = ?$$

(reprezentată în tabloul cu această temă al pictorului Bogdanov-Belski)

6. Problema lui Lucas.

Între Europa (portul le Hâvre) și America (portul New-York), la 7 a.m. precis, pleacă, în fiecare zi, cîte un vapor. Drumul durează exact 7 zile. Dacă cineva pleacă pe un asemenea vapor, cîte vapoare întîlnește pe drum?

7. Veverița la . . . olimpiadă.

O veveriță aduce o alună în vizuină în 20 de minute. Cît de departe de alun este vizuina, dacă se știe că veverița fuge fără alună 5 m/s, iar cu alună, 3 m/s?

(Olimpiada de matematică, cls. a V-a, Kiev, 1950)

8. Problema lui Newton.

În 18 zile, 64 de boi au păscut iarba unei livezi de 48 arii, iar în 30 de zile, 84 de boi au păscut iarba unei livezi de 90 arii. Cîți boi ar putea să pască iarba de pe 60 de arii în 20 de zile?

(Se va presupune că, la intrarea boilor în livezi, iarba avea aceeași înălțime și că ea crește în mod uniform pe tot timpul păscutului.)

9. Trei izlazuri, acoperite cu iarbă de aceeași desime și care crește la fel de repede, au suprafața de $3\frac{1}{3}$ ha, 10 ha și 24 ha.

Cu iarba de pe primul izlaz s-au hrănit 12 boi timp de 4 săptămîni; cu iarba de pe izlazul al doilea, s-au hrănit 21 de boi, timp de 9 săptămîni.

Cîți boi se pot hrăni cu iarba de pe izlazul al treilea, timp de 18 săptămîni?

• • •

10. Într-o grădină zoologică se află 37 ființe cu 86 picioare și 44 limbi. Știind că vulpile și tigrii la un loc sînt cît cangurii la număr, iar tigrii și urangutanii împreună sînt cît șerpilor la număr, să se afle cîți canguri și urangutani, care stau în cîte două picioare fiecare, șerpi cu cîte două limbi fiecare și cîți tigri se află în grădina zoologică.

(Propusă de zidarul Stepan Ionel și publicată în G.M.A., nr. 9, anul IX.)

11. Problema lui Euler¹

Două țărănci au adus împreună la tîrg 100 de ouă, una avea mai multe decît cealaltă; ambele au încasat sume egale.

Atunci prima i-a spus celeilalte:

„Dacă aș fi avut ouăle tale, aș fi încasat 15 creișari.“

Cea de-a doua i-a răspuns:

„Iar dacă eu aș fi avut ouăle tale, aș fi încasat pentru ele $6\frac{2}{3}$ creișari.“

Cîte ouă avea fiecare?

12. Pe pista circulară a unui velodrom pedalează doi cicliști cu viteze constante. Mergînd în sensuri opuse, ei se întîlnesc la fiecare 10 secunde; mergînd în același sens, unul din ei îl ajunge pe celălalt la fiecare 170 secunde.

Care este viteza fiecăruia dintre cicliști, dacă lungimea pistei este de 170 m?

• • •

13. Problema lui L. N. Tolstoi²

Un grup de cosași a ieșit la cîmp. Cosașii trebuiau să cosească două fînețe dintre care una era de două ori mai mare decît cealaltă.

Jumătate de zi, grupul a cosit fîneța cea mare, iar în a doua jumătate a zilei, grupul s-a împărțit în două: o jumătate a rămas să termine fîneța cea mare, iar cealaltă jumătate a început să cosească fîneța cea mică.

Seara, fîneța cea mare era cosită, iar din cea mică rămăsese un lot care a fost cosit a doua zi de un singur cosaș, care a lucrat toată ziua. Din cîți cosași era format grupul?

14. O întreprindere siderurgică a produs în cursul anului 1949 o cantitate de 5000 tone de oțel. Întreprinderea își propune ca în fiecare an să mărească producția cu 20% față de anul precedent.

În cît timp, socotind de la 1 ianuarie 1949, va totaliza întreprinderea o producție de 50 000 tone de oțel?

(R.M.F., 1950)

¹ Din „Introducere în algebră“ a lui L. Euler.

² În realitate, o problemă care-i plăcea foarte mult marelui scriitor.

15. Problema celor două izvoare de lumină.

Între două izvoare de lumină cu intensitățile de 20 candelă și 45 candelă, se așază un ecran. Pentru ca ambele fețe ale lui să fie luminate în mod egal, ecranul trebuie să fie așezat cu 1 metru mai aproape de un izvor decât de celălalt.

Să se determine distanța dintre cele două izvoare de lumină?

• • •

16. În 10 plicuri se repartizează suma de 1 000 de lei, astfel încât se poate plăti orice sumă pînă la 1 000 de lei, fără să se deschidă vreun plic. Cum trebuie repartizată suma?

• • •

17. O problemă a lui Lalescu.

Două trenuri, care parcurg distanța AB cu viteze diferite, pleacă unul din stația A la ora 6, celălalt din stația B la ora 6 și 30 de minute și se întîlnesc în stația intermediară C la ora 7 și 27 de minute.

La întoarcere, ambele trenuri pornesc la ora 18, fiecare cu aceeași viteză ca la ducere și fără oprire în C. La ora 19, distanța între trenuri se micșorează cu $\frac{4}{5}$ din distanța totală AB; în sfîrșit, întîlnirea are loc, de data aceasta, la 37 km depărtare de C.

Să se determine distanțele AC și CB, vitezele trenurilor și ora de întîlnire la întoarcere.

18. Problemă care se rezolvă printr-o ecuație diofantică¹ (ecuație nedeterminată cu 2 necunoscute care se rezolvă în numere întregi).

„Un cetățean trebuie să plătească pentru o cravată 19 ruble. Cum trebuie să procedeze cumpărătorul, care are la el numai hîrtii de 3 ruble, și casierul, care are numai hîrtii de 5 ruble, astfel ca plata să se facă fără ca banii lor să fie schimbați?”

• • •

19. O rezolvare interesantă. În cartea „Culegere de probleme de aritmetică”, profesorul Ion Ionescu formulează următoarea problemă:

„Un cioban nu are 100 de oi, dar îi lipsesc anume atîtea cîte ar avea peste 100, dacă ar avea de 9 ori cît are acum.

Cîte oi are acel cioban?”

Rezolvarea dată de autor:

„Se face un pătrat divizat în 9 pătrate egale (fig. 4). La un colț însemnăm unul din pătrate care reprezintă oile ce le posedă, iar pătratele rămase neînsemnate reprezintă oile ce le-ar avea, dacă ar fi de 9 ori pe atîtea.

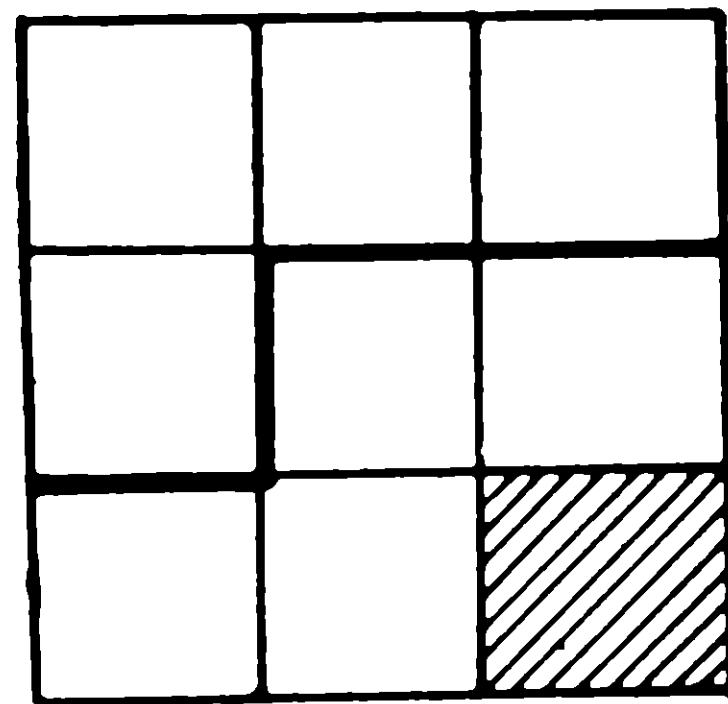


Fig. 4.

Se duce linia groasă care să lase de o parte și de alta același număr de pătrate neînsemnate. Acea linie lasă în jos numărul de 100 de oi. Deci 5 pătrate mici fac 100 oi și prin urmare unul echivalează cu 20 oi.

Acesta este numărul căutat.”

¹ După numele lui Diofante, căruia îi revine meritul introducerii lor în algebră.

20. Comandantul unei tabere de pionieri împarte pionierii din tabără în mai multe echipe în felul următor:

Un pionier și o zecime din rest merg la cules zmeură; doi pionieri și o zecime din rest dau ajutor la bucătărie, trei pionieri și o zecime din rest merg la scăldat ș.a.m.d. pînă nu rămîne nici un pionier nerepartizat.

La sfîrșit, se constată că în fiecare echipă se găsește același număr de pionieri. Cîți pionieri au fost în tabără și cîte echipe s-au format?

• • •

21. Problema celor 8 locomotive.

Să se manevreze, folosind 17 mișcări, 8 locomotive plasate în careu ca în figura 5, astfel ca locomotivele să ajungă în ordinea numerelor lor, pe linia exterioară a pătratului.

• • •

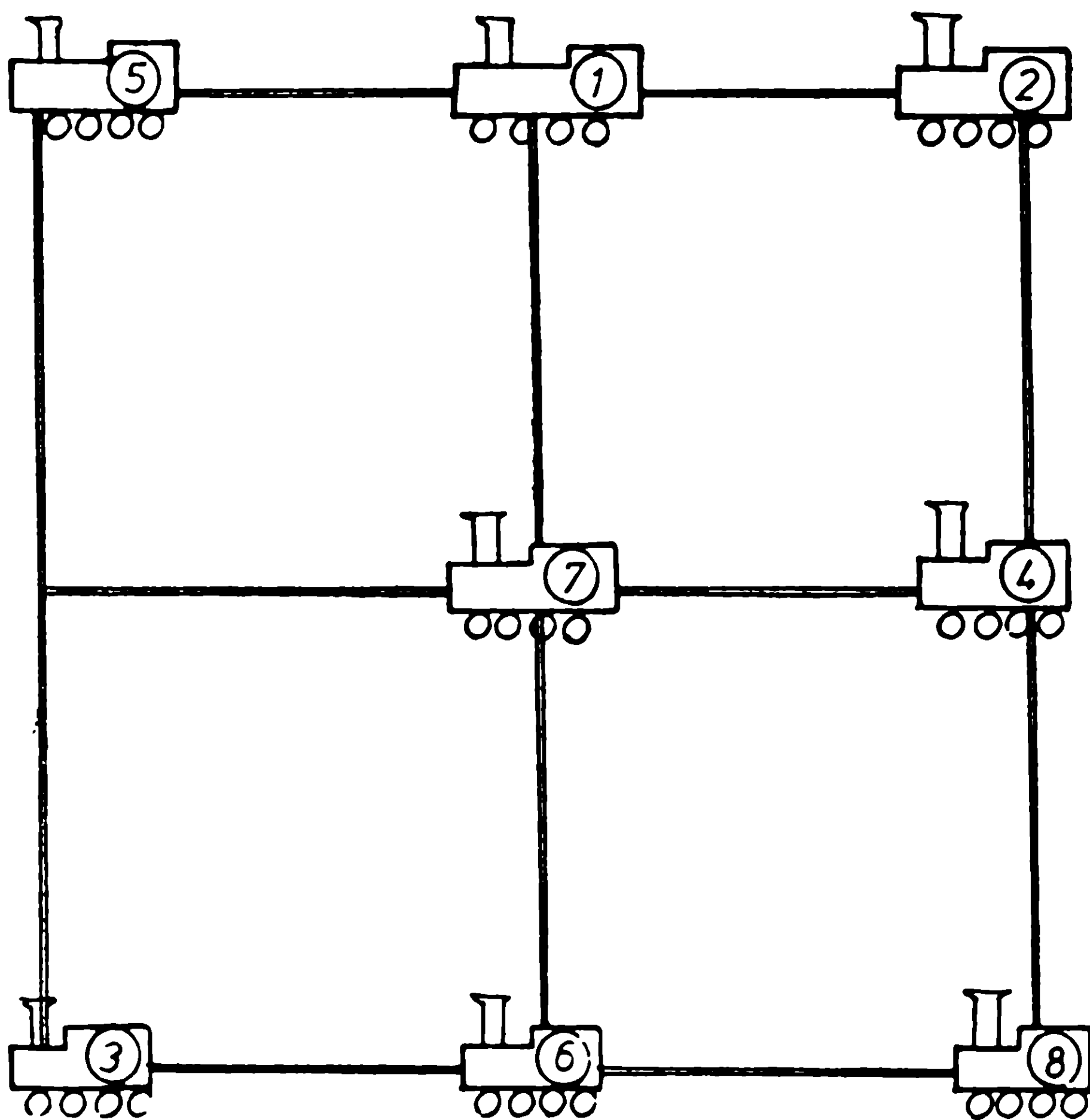


Fig. 5.

22. O barcă nu poate transporta dintr-o dată decît 100 kg. Cum vor putea să treacă rîul cu acea barcă un om care cîntărește 80 kg și cei doi fii ai săi, care cîntăresc 30, respectiv 50 kg?

• • •

23. Când teoria poate fi mai tare decât intuiția practică.

De doi stâlpi fixați de o parte și de alta a unei străzi, la distanță de 20 m, se atîrnă, cu ajutorul unui cablu care face o săgeată de 0,15 m, o lampă grea de 15 kg.

Cablul este dat că rezistă la o forță de întindere de 400 kg. Va rezista oare cablul solicitării la care este supus ori se va rupe?

...

24. Problema bradului.

— Bradule, te-a frînt furtuna! ... Cît de înalt ai fost?

— Nu știu, dar înainte, de-mi rîdea soarele sub un unghi de 60° , lăsam umbră cît lungimea ce mi-a mai rămas; iar acum, de-mi plînge sub un unghi de 30° , las doar 20 m peste ce-am pierdut ...

— Ei, lasă, atunci, că socotesc eu!

...

25. La o cursă aleargă trei cai A, B, C. Dacă A cîștigă, se dă de a ori miza; dacă B cîștigă, se dă de b ori miza; iar dacă C cîștigă, se dă de c ori miza.

Ce mize trebuie să se pună pe cei trei cai, pentru ca, în toate cazurile posibile, să se cîștige suma s ?

(R.M.T.)

26. Problema celor două poduri plutitoare.

Două poduri plutitoare pornesc în același moment din ambele părți ale unui fluviu și străbat apa după un drum perpendicular pe maluri. Ele au viteză constantă, dar unul se deplasează mai rapid.

Podurile se încrucișează în dreptul unui punct situat la 720 de iarzi de malul cel mai apropiat.

Ambele poduri rămîn la chei 10 minute, înainte de a face cursa retur. La întoarcere, ele se întîlnesc la 400 de iarzi de celălalt mal. Cît de lat este fluviul?

(Sam Loyd, în *Cyclopedia of Puzzles*, 1914;
vezi *Amuzamente matematice* de Martin Gardner.)

27. La campionatul de fotbal, din cele 55 de meciuri, fiecare echipă a jucat cu fiecare din celelalte echipe o singură dată. Cîte echipe au luat parte la campionat?

...

28. Problema celor șapte poduri

În Koenigsberg (azi Kaliningrad) sînt șapte poduri peste riul Pregel (fig. 6). Cineva s-a gîndit să le traverseze pe toate și să revină în punctul de plecare fără a trece de două ori același pod.

Stabiliți itinerarul de urmat în acest scop.

Leonhard Euler (1736)

29. Un călăreț și un drumeț pornesc din același punct A spre punctul B. Călărețul ajunge în B cu 50 minute înaintea drumețului, se întoarce imediat înapoi spre A și se întîlnește cu drumețul la o distanță de 2 km de B.

Pentru tot drumul de la A la B și înapoi, călărețului i-au trebuit o oră și 40 minute.

Ce distanță este de la A la B și cu ce viteză a mers fiecare?

...

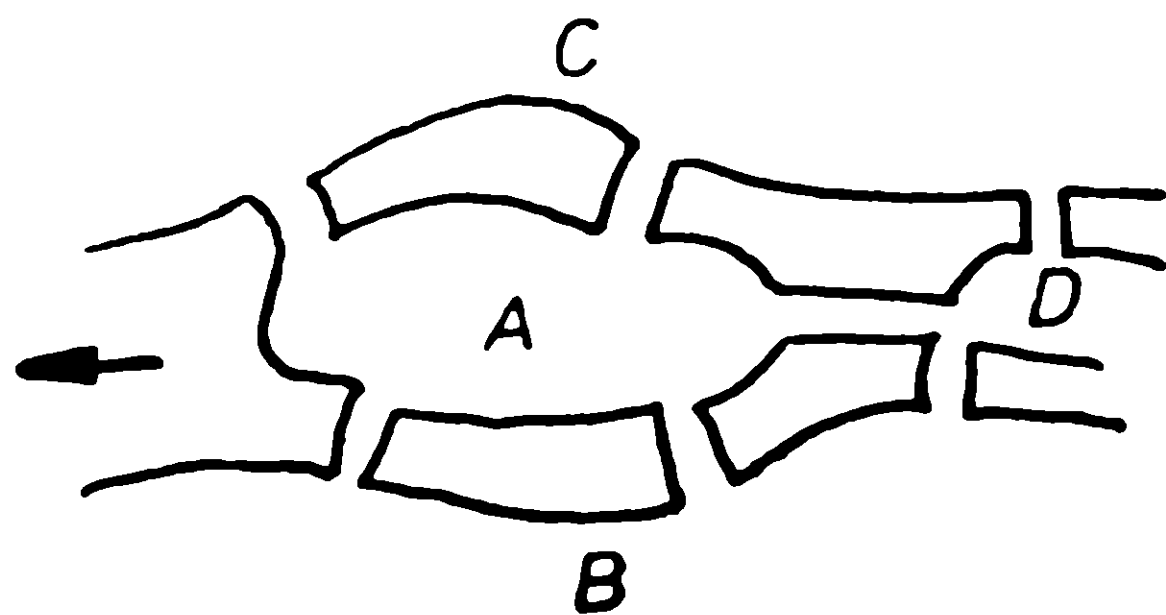


Fig. 6.

30. Problema lui Lev Tolstoi (pe baza datelor din povestirea „Cît pămînt îi trebuie unui om”).

Pahom fugea pe laturile unui patrulator. Despre prima latură a lui citim următoarele:

„Străbătu vreo cinci verste . . . Hai să mai fac vreo cinci verste; pe urmă o iau la stînga!“ . . .

Prin urmare, prima latură a patrulaterului avea o lungime cam de 10 verste.

Despre cea de-a doua latură, care formează împreună cu cea dintâi un unghi drept, nu ni se comunică în povestire nici un fel de indicații numerice.

Lungimea celei de-a treia laturi, evident perpendiculară pe cea de-a doua, se arată în povestire în mod direct: „*Nu străbătuse pe a treia latură decît vreo două verste*“.

În mod direct ni se dă și lungimea celei de-a patra laturi: „*Pînă la locul de sosire rămîneau tot 15 verste*“.

Cîte verste pătrate de pămînt a înconjurat Pahom? Dacă parcela înconjurată ar fi avut forma nu de trapez, ci de dreptunghi cu acelaşi perimetru, suprafaţa înconjurată ar fi fost mai mare sau mai mică? Cu cît?

(Prelucrare după I. Perelman)

31. Calculul înălțimii munților din lună (aplicație a teoremei lui Pitagora generalizată).

Presupunînd Luna la primul pătrar (fig. 7), deci luminată pe jumătate de razele Soarelui ce vin din direcția (S), un munte aruncă umbra pe fața luminată a Lunii și aceasta se vede ca o pată AB.

Planul determinat de centrul Luni își de raza de lumină care trece prin vârful muntelui secționează Luna și muntele așa cum se vede în figură: $L'B'$ este raza Lunii, iar $L'A'$ este raza Lunii plus înălțimea muntelui.

Ceea ce se poate măsura de la suprafața Pământului sînt distanțele: $AB=A'B'$ și $BC=B'C'$ (există metode pentru aceasta).

Atunci, din triunghiul $L'A'B'$, avem:

$$L'A'^2 = L'B'^2 + A'B'^2 + 2A'B' \cdot B'C'$$

Toți termenii din partea a doua sînt cunoscuți, deci se poate calcula $L'A'$, din care scăzînd raza Lunii se obține înălțimea muntelui.

• • •

32. Problema zborului spre Lună.

Teoretic această problemă se reduce la determinarea punctului de egală atracție a Pământului și a Lunii, care, o dată depășit, va permite rachetei să fie atrasă pe Lună de forța de gravitație a acesteia, devenită preponderentă.

Fie: M = masa Pământului;

x = distanța rachetei de Pământ;

k = forța cu care se atrag două mase de câte 1 gram la distanța de 1 km;

m = masa Lunii

l = distanța dintre Lună și Pământ = 384 000 km.

Potrivit legii lui Newton, avem:

$$\frac{Mk}{x^2} = \frac{mk}{(l-x)^2} \quad \text{sau} \quad \frac{x^2}{(l-x)^2} = \frac{M}{m} = 81,5 \quad (\text{constanta gravitațională}).$$

$$\frac{x}{l-x} = \sqrt{81,5} = 9,03$$

$$10,03x_1 = 9,03l; \quad x_1 = \frac{9,03 \cdot 384\,000}{10,03}$$

Rezultă: $x_1 = 346\,000$ km
 $x_2 = 430\,000$ km

Deci, pentru ca racheta să fie atrasă de Lună, trebuie să ajungă în interiorul unei sfere concentrice cu Luna, al cărei diametru să fie $D = 430\,000 - 346\,000 = 84\,000$ km.

...

33. Cineva află de existența a trei inovații: cu ajutorul primei inovații se poate economisi 30% din combustibil, cu a doua, 45%, iar cu cea de a treia, 25%.

Propunându-și să folosească toate cele trei inovații dintr-o dată, ajunge la concluzia că va putea economisi $30\% + 45\% + 25\% = 100\%$ din combustibil.

Este posibil acest lucru?

Câte procente economie va realiza el în realitate?

...

34. Problema rachetelor care se ciocnesc.

Două rachete se îndreaptă una spre cealaltă, prima cu 9 000 de mile pe oră, iar a doua, cu 21 000 de mile pe oră. Ele decolează din două puncte situate la o distanță de 1 317 mile.

Fără a folosi hîrtia și creionul, calculați distanța dintre ele cu un minut înainte de ciocnire.

(Martin Gardner, *Amuzamente matematice*)

35. După o legendă musulmană, Mahomed obișnuia să deseneze 'pe nisip, dintr-o singură trăsătură cu vârful iataganului, un dublu bicorn (fig 8). Această figură a căpătat denumirea de sigiliul lui Mahomed. Să se stabilească ordinea de urmat pentru trasarea acestei figuri dintr-o singură linie continuă.

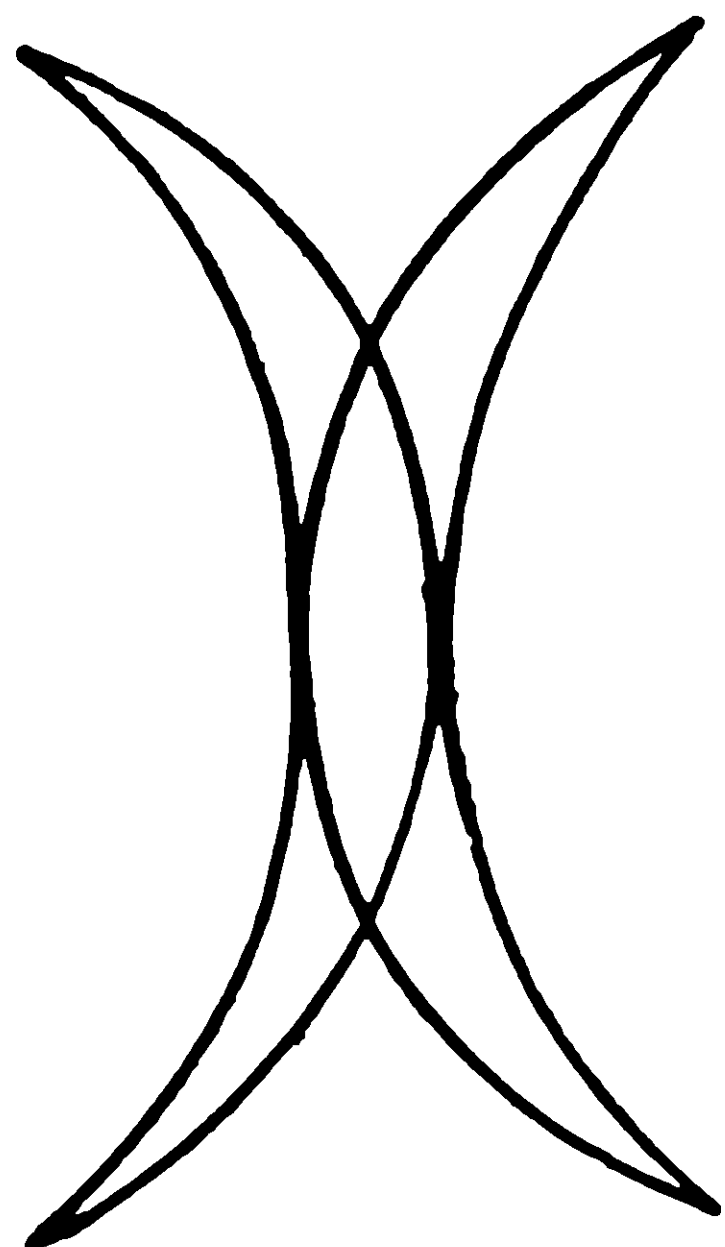


Fig. 8.

36. Problema luptătorilor.

Două linii de trăgători A și B se luptă față în față. De la A pleacă 5 focuri pe minut de la fiecare soldat, iar de la B, pleacă 6. Cei din A ucid 2%, iar cei din B, 4% din numărul focurilor trase.

În 20 de minute de luptă, de la A s-au tras 8000 de focuri mai mult ca din B, iar la finele luptei rămăse-
seră în A, 92 trăgători mai mult ca pe linia B.

Care era efectivul celor două linii la început și cât a rămas după luptă? Câte focuri a tras fiecare linie?

37. Absurditate aparentă.

Cu ce este egal 84, dacă $8 \cdot 8 = 54$?

38. Problema peștilor luptători.

În Siam se cresc două soiuri de pește pentru calitățile lor de luptători: un biban mare, alb, cunoscut ca peștele-rege și un crap mic, negru, numit peștele-diavol.

Antipatia dintre aceste două specii este atât de mare, încât se atacă reciproc de îndată ce se văd și se bat pînă la moarte.

Un peste-rege poate dispune cu ușurință de unul sau de doi pești mici, exact în câteva secunde. Însă peștii-diavoli sînt tot atât de agili și colaborează atât de armonios, încît 3 din acești peștișori egalează pe unul mare și pot lupta ore întregi fără nici un rezultat. Ei își realizează atât de rațional și de științific tactica de atac, încît 4 peștișori ucid un peste mare exact în 3 minute, iar un număr mai mare dă lovitura de grație proporțional mai repede. (Adică 5 pești-diavoli ucid un peste rege în 2 minute și 24 s., șase îl ucid în două minute etc.)

Dacă opunem 4 pești-rege la 13 peștișori-diavoli, care tabără va cîștiga lupta și cât timp va dura, presupunînd, firește, că peștii cei mici cooperează în maniera cea mai eficace?

(*Cyclopedia of Puzzles*, de Jr. Loyd, 1914)

39. Să se rezolve dintr-o privire ecuația:

$$x^x = 3$$

40. Fără a calcula valoarea rădăcinilor, să se spună ce este mai mare: $\sqrt[5]{5}$ sau $\sqrt{2}$?

41. *Enigma lui Dudeney*¹

O încăpere dreptunghiulară are dimensiunile: lungime 30 picioare, lăţime 12 şi înălţime 13 picioare. Păianjenul se află pe linia mediană a unui perete la distanţa de 1 picior (aprox. 30,5 cm) de tavan.

Musca se află pe linia mediană a peretelui opus la 1 picior înălţime deasupra pardoselii şi este atît de paralizată de frică, încît nu se poate mişca.

Care este cea mai scurtă distanţă pe care trebuie s-o străbată păianjenul pentru ca să ajungă la muscă?

42. *Problema nucilor de cocos.*

„Cinci oameni şi o maimuţă au naufragiat pe o insulă pustie şi şi-au petrecut prima zi culegînd nuci de cocos, ca să ai bă ce mînca. Le-au aşezat pe toate grămadă şi s-au culcat.

Pe cînd dormeau toţi, unul dintre oameni s-a trezit şi, gîndindu-se că ar putea să iasă scandal dimineaţa, la împărţirea nucilor de cocos, s-a hotărît să-şi ia partea lui. A împărţit nucile de cocos în cinci grămezi. A lăsat de o parte o nucă pentru maimuţă şi apoi şi-a ascuns grămada lui, iar pe celelalte le-a pus la loc.

Rînd pe rînd, cîte unul din oameni se trezea şi proceda la fel. Fiecare lăsa o nucă de cocos de o parte, pentru maimuţă.

Şi toţi cei cinci bărbaţi au făcut la fel, unul după altul; fiecare a luat din grămadă, cînd s-a trezit, o cincime din nucile de cocos şi fiecare a lăsat cîte o nucă pentru maimuţă.

Dimineaţa şi-au împărţit nucile de cocos rămase şi împărţirea s-a făcut exact. Fireşte, toţi ştiau că lipseau nuci de cocos; dar fiecare era tot atît de vinovat ca şi ceilalţi, aşa că şi-au ţinut cu toţii gura.

Cîte nuci de cocos au fost la început?“

(M. Gardner, *Amuzamente matematice*)

43. Să se construiască grafic x dat de expresiile:

$$1) x = \sqrt{abcd}$$

$$2) x = \sqrt{a^4 + b^4}$$

• • •

44. *Problema lui Napoleon Bonaparte.*

Să se împartă un cerc dat în patru părţi egale fără a se recurge la riglă. Se dă poziţia centrului acestui cerc. Se poate folosi numai compasul.

(I. I. Perelman, *Geometria distractivă*)

45. *Problemă atribuită lui Napoleon Bonaparte.*

Dacă se construiesc triunghiuri echilaterale în exterior (sau interior) pe treimea din mijloc a fiecărei laturi a unui triunghi, vîrfurile acestor trei triunghiuri neaflate pe laturile triunghiului iniţial, formează un nou triunghi echilateral.

(G.M., nr. 8/1968)

¹ Henry Ernest Dudeney, cel mai mare enigmist al Angliei (născut la Mayfield în 1857).

46. Pe fundul unei farfurii, care este un cerc cu raza de 10 cm, se aşază 10 monede cu raza de 1 cm. Cît la sută din suprafaţa farfuriei acoperă monedele. Nu se va afla aria nici a farfuriei, nici a monedelor.

• • •

47. La 9 sonde trebuie repartizaţi 3 ingineri, fiecăruia repartizîndu-i-se cîte 3 sonde. În cîte moduri se poate face repartiţia?

• • •

48. Două localităţi A şi B sînt situate de o parte şi de alta a unui rîu. În ce loc trebuie făcut podul MN, pentru ca drumul AMNB să fie minim?

• • •

49. Pe mormîntul lui Arhimede se găseşte o figură compusă dintr-un cilindru în care se înscrie un con şi o sferă de raze egale, înălţimea cilindrului şi a conului fiind egale cu diametrul sferei. Ce relaţie există între volumul sferei şi volumele celorlalte două corpuri?

• • •

50. Să se deducă prin cîte o construcţie geometrică următoarele formule algebrice:

$$1^{\circ}(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$2^{\circ}(a^2-b^2)=(a-b)(a+b)$$

• • •

51. Ce grosime s-ar obţine dacă se îndoaie o coală de hîrtie de 50 ori? Să se estimeze rezultatul; apoi să se calculeze, socotind grosimea colii de hîrtie de 0,1 mm.

• • •

52. *Problema piesei de 5 lei.*

Dacă trei cercuri egale trec toate prin acelaşi punct P_0 , atunci cercul care trece prin cele trei puncte P_1 , P_2 şi P_3 , în care aceste cercuri se taie două cîte două, este egal cu cercurile date.

Notă: Această problemă a fost formulată de profesorul Gh. Ţiţeica în ajunul unui concurs al *Gazetei Matematice*, înaintea primului război mondial, în timp ce se ajuta cu o monedă veche de 5 lei să traseze cu creionul cercuri egale. După ce a descoperit problema experimental, autorul i-a găsit şi o demonstraţie.

53. Un înotător înoată pe rîul Neva împotriva curenului. Lîngă podul Republican, el pierde o ploscă goală. După ce mai înoată 20 minute împotriva curenului, el observă pierderea, se întoarce şi ajunge plosca lîngă podul Smidt.

Distanţa dintre cele două poduri fiind de 2 km, aflaţi cu ce viteză curge Neva.

• • •

54. Distanţa dintre două oraşe, A şi B, este de 200 km. Din A pleacă o cale ferată rectilinie Ax; distanţa de la oraşul B la calea ferată este de 87 km.

Să se calculeze cum trebuie construită o șosea rectilie de la orașul B la calea ferată, astfel încît costul transportului mărfurilor pe traiectul dintre A și B să fie minim, știind că pe calea ferată transportul este de 2 ori mai ieftin decît pe șosea.

Să se afle la ce distanță de A trebuie așezată stația care va lega orașul B cu calea ferată Ax.

(F.G.M.)

55. Trei vapoare intră în port după fiecare cursă. Primul vapor își face cursa în 6 zile, al doilea în 5 zile, iar al treilea în 10 zile. Peste cîte zile (în cel mai apropiat timp) se vor întîlni în port, primul cu al doilea vapor, primul cu al treilea și toate trei vapoarele odată, în cazul cînd ar fi ieșit din port în același timp?

...

56. Pe laturile unui triunghi ABC se iau punctele $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ care împart laturile BC, CA și AB în părți respectiv egale. Să se demonstreze că aria triunghiului ce se obține prin intersectarea dreptelor AA_1, BB_1 și CC_1 reprezintă $1/7$ din suprafața triunghiului ABC.

...

57. Se dă un semicerc ARB de diametru $AB=6$ cm. Se împarte diametrul în părți proporționale cu numerele 1, 2 și 3. Pe aceste segmente se construiesc semicercuri ca în figura 9.

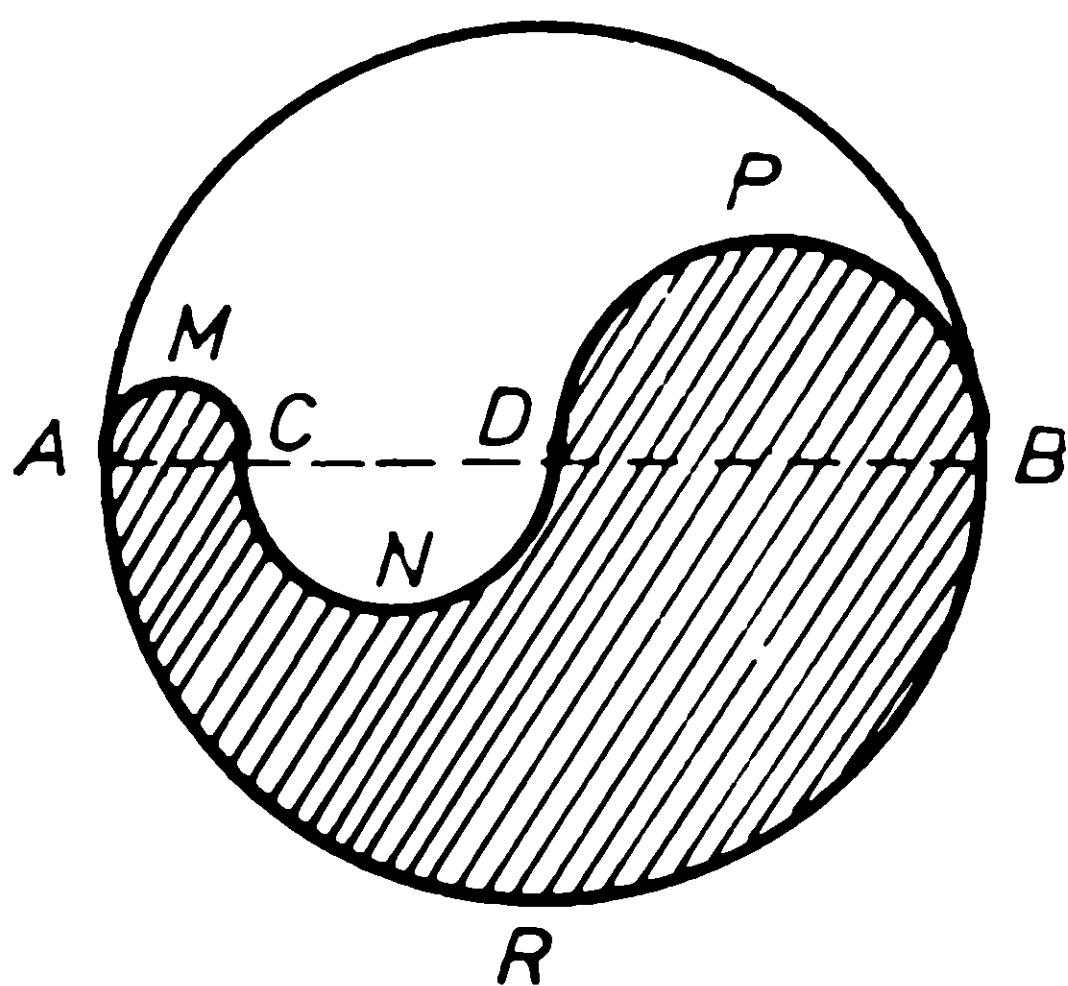


Fig. 9.

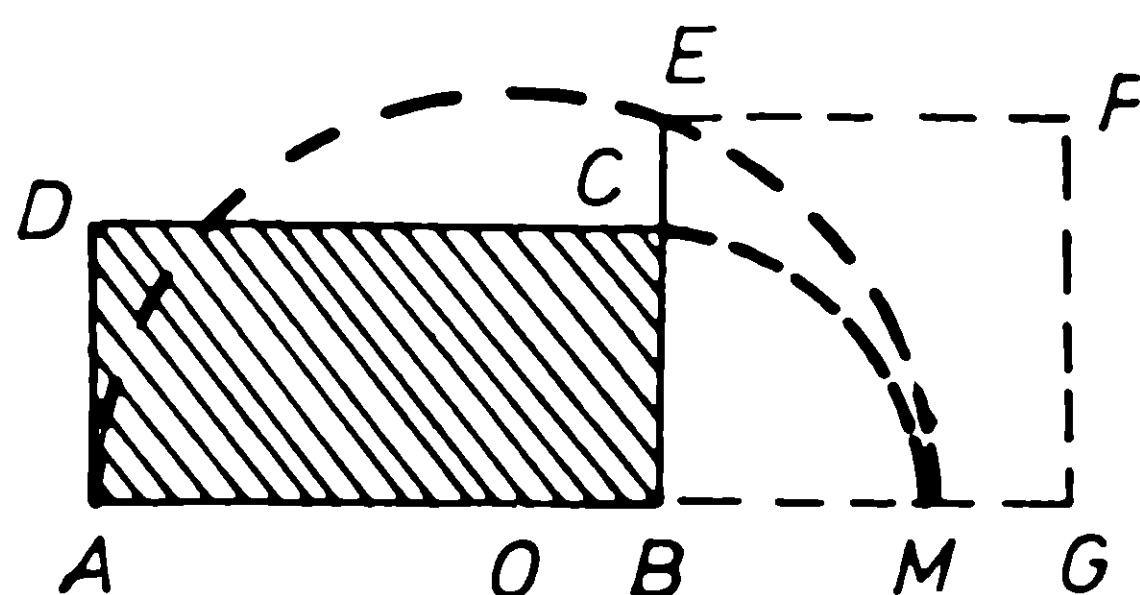


Fig. 10.

Să se afle lungimea conturului ARB . . . A, precum și aria închisă de acesta.

...

58. Să se arate pe baza indicațiilor din figura 10, cum se poate transforma un dreptunghi ABCD într-un pătrat BEFG, echivalent cu el.

...

59. Linia care se numește în arhitectură curbă cu trei centre (sau curbă semiovală) se construiește astfel (fig. 11): se împarte segmentul AB în trei părți egale, prin punctele C și D , cu o rază egală cu CD ; cu centre în aceste

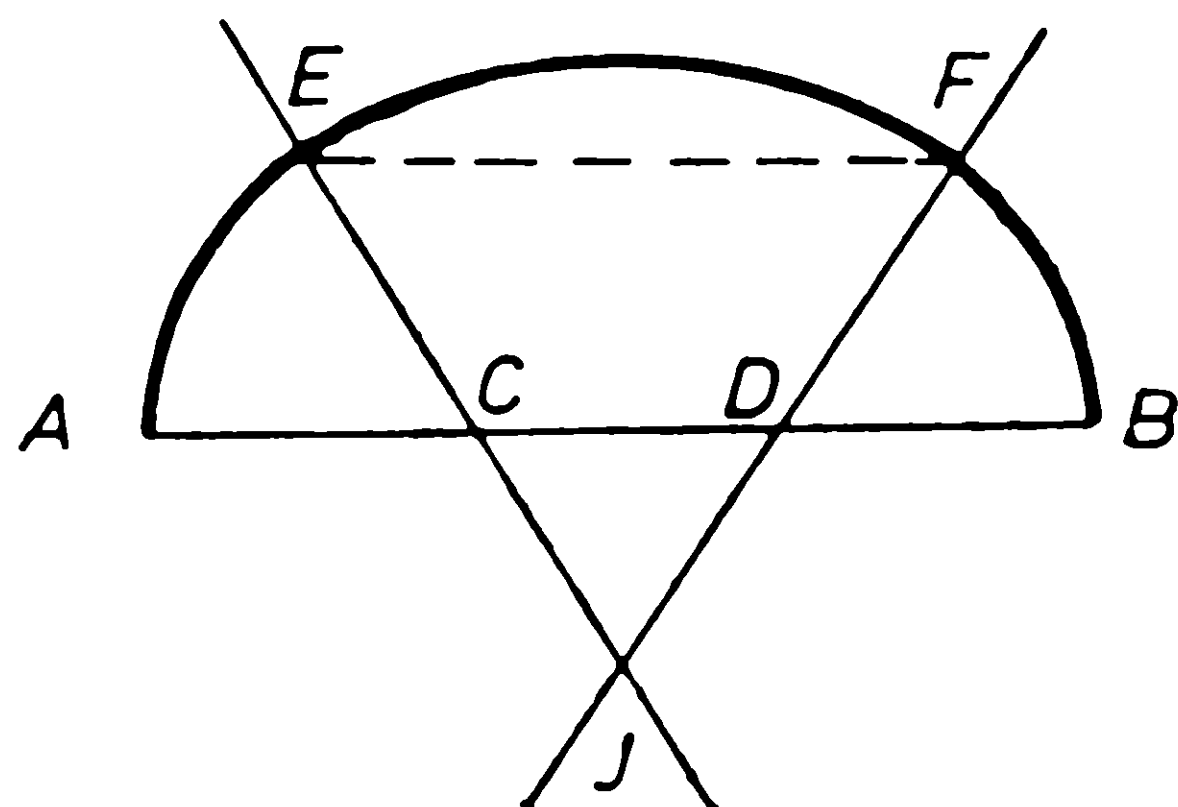


Fig. 11.

puncte, se duc două arce care se taie într-un punct J ; se duc dreptele JC și JD , care se prelungesc; se descriu arcele AE și BF , cu centre în punctele C și D și arcul EF cu centrul în punctul J .

Să se arate de ce arcele AE , EF și FB sînt racordate. Se racordează ele și în cazul cînd AC este egal cu DB , dar nu este egal cu CD ?

...

60. Problema sferei găurite.

Prin centrul unei sfere solide a fost sfredelită o gaură cilindrică, avînd lungimea de 6 țoli. Care este volumul restului sferei?

(M. Gardner, *Amuzamente matematice*)

61. Fie un cerc de rază R . Să se afle cîte cercuri de rază R trebuie pentru a înconjura cercul dat, astfel ca aceste cercuri să fie tangente între ele și tangente cercului O .

...

62. Un cerc se rostogolește în exterior pe un alt cerc. După ce ajunge în punctul de plecare, continuă să se rostogolească pe o dreaptă tangentă la cercul fix, în acel punct.

Ce linie descrie centrul cercului mobil? Dar un punct M de pe cerc? Demonstrație.

...

63. O hidrocentrală H trebuie să alimenteze cu energie electrică o Cooperativă Agricolă de Producție G , aflată în același unghi ascuțit a două șosele ca și hidrocentrala; alimentarea trebuie să se facă prin două stații de transformare A și B , care se află pe cîte una din șosele.

În acest scop, un cablu va lega hidrocentrala cu cele două stații de transformare în continuare și apoi, tot în continuare, cu gospodăria. Se cere să se afle locul așezării, pe cele două șosele, a celor două stații de transformare, cu condiția să se facă cea mai mare economie la lungimea cablului.

(Concursul de matematici al Societății de Științe Matematice și Fizice din R.P.R., 1953, regiunea Iași.)

64. Fie două cercuri concentrice, avînd centrul în O și astfel că raza celui mai mare este dublul razei celui mic.

Pe cercul mare considerăm un punct oarecare M și ducem din el o tangentă la cercul mic. Ea taie cercul mare într-un punct A . Din punctul A ducem tangenta diferită de AM , la cercul mic. Ea taie cercul mare în punctul B .

Să se demonstreze că tangenta dusă din B, diferită de BA, la cercul mic, trece prin punctul M.

(Problemă în legătură cu celebra problemă a închiderii a lui Poncelet.)

65. Se dau în plan trei puncte A, B, C. În unghiul ABC să se găsească un punct M din care segmentul AB să fie văzut sub un unghi de 60° , iar segmentul BC să fie văzut sub un unghi de 80° .

(Problema hărții)

66. Se dă un segment de dreaptă AB de lungime a care se împarte în n părți egale (fig. 12, pentru $n=3$). Cu origina în A, respectiv în B, se descriu

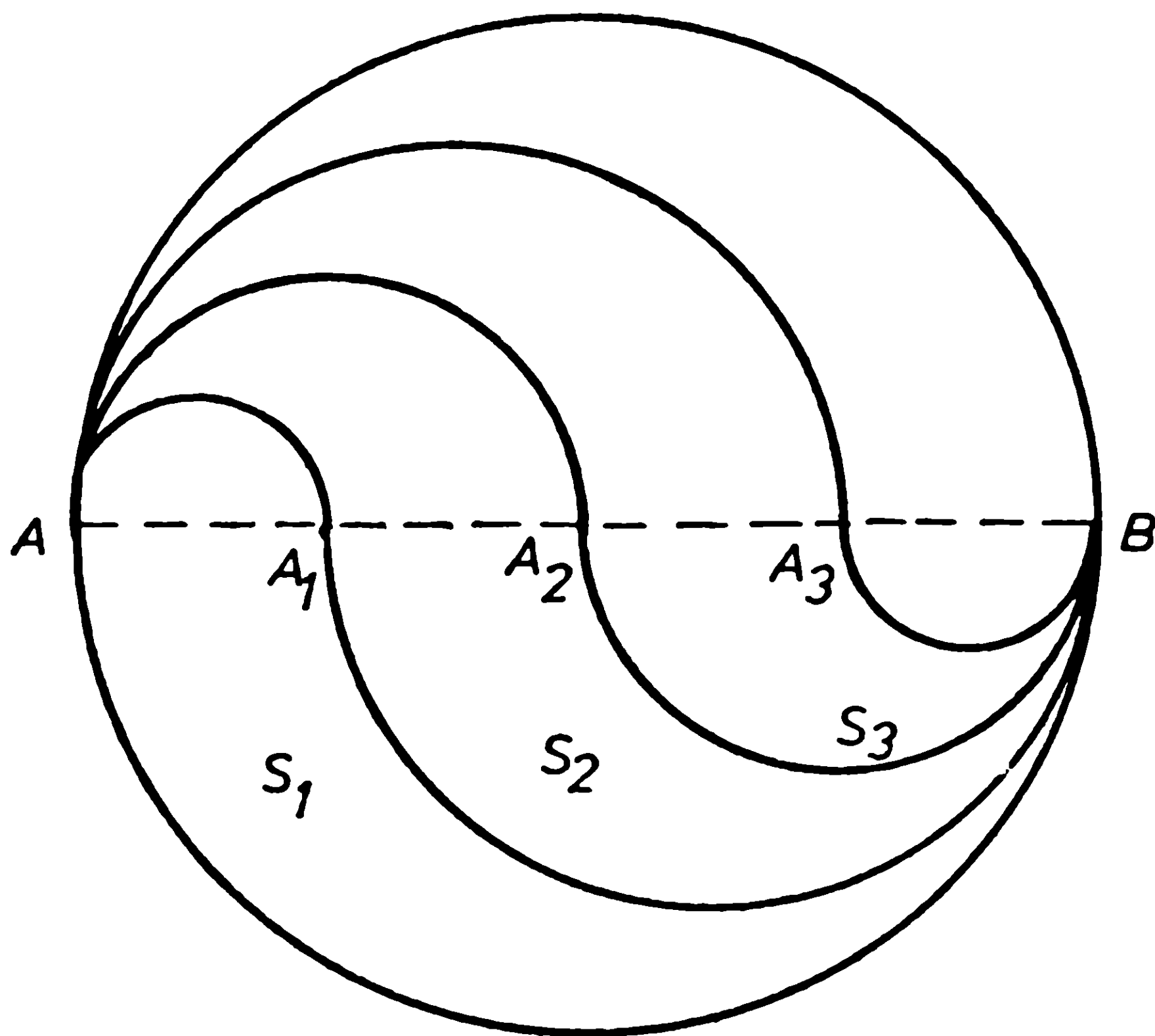


Fig. 12.

deasupra și dedesubt semicercuri de diametru AA_1 , AA_2 , AA_3 , ..., AA_{n-1} , AB ; BA_1 , BA_2 , BA_3 , ..., BA_{n-1} , BA .

Să se demonstreze că:

- Ariile fișilor cuprinse între aceste semicercuri sînt egale;
- Perimetrele lor sînt de asemenea egale.

...

67. Se dă un triunghi isoscel ABC. Fie D mijlocul bazei BC, E proiecția lui D pe AC, iar F mijlocul lui DE. Să se arate că $AF \perp BE$.

(The American Mathematical Monthly)

68. *Pentagrama lui Miquel.* Dacă se circumscrie cercuri triunghiurilor formate de fiecare latură a unui pentagon și prelungirile laturilor adiacente, cele cinci puncte de întîlnire ale cercurilor alăturate sînt conciclice.

...

69. Un aviator se urcă deasupra Pământului la înălțimea h . Cîtă suprafață de pămînt vede el, dacă notăm raza Pământului cu R ?

• • •

70. Un turist, plecînd dintr-un oraș, a mers 3 ore pe jos și 2,5 ore călare, depărtîndu-se, în total, de oraș cu 40 km; altă dată el a plecat călare din oraș cu aceeași viteză și a parcurs $5\frac{1}{2}$ ore, apoi s-a întors pe jos 3 ore, aflîndu-se, astfel, tot la o distanță de 40 km de oraș.

Cu ce viteză a mers turistul călare? (Rezolvare grafică).

• • •

71. Să se afle unghiul ce trebuie să facă razele unui cerc OA și OB , pentru ca volumul născut din revoluția sectorului OAB în jurul lui OA să fie egal cu sfertul volumului sferei.

(Propusă de Gh. Țițeica în „*Revista Școalei*” a liceului din Craiova.)

72. Vîrfurile unui triunghi dreptunghic ABC împart cercul circumscris în trei arce.

Se duc tangente la fiecare din aceste arce, astfel ca lungimile acestora, cuprinse între prelungirile laturilor, să aibă mijloacele în punctele de contact.

Să se arate că punctele de contact sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

(Teorema lui Pollock)

73. Fie D , E , F punctele de contact cu laturile ale cercului I , înscris în triunghiul ABC .

Să se arate că dreptele AD , BE , CF trec prin același punct G (*punctul lui Gergonne al triunghiului*).

• • •

3. Probleme celebre

1. La greci, au apărut patru probleme interesante de care omenirea s-a ocupat timp de peste două milenii și jumătate. Aceste probleme, devenite celebre, sînt:

a) *Împărțirea cercului* sau a unui arc de cerc într-un număr oarecare de părți egale.

De această problemă este legată înscrierea într-un cerc a unui poligon regulat cu un număr de laturi dat.

b) *Dublarea cubului*, adică construirea unui cub cu un volum de două ori mai mare decît un cub dat. Legenda spune că această problemă s-a pus locuitorilor Atenei în timpul unei groaznice epidemii, cînd oracolul de la Delfi le-a răspuns:

„Dublați altarul lui Apolon (care avea o formă cubică), *dacă vreți să potoliți mînia divină*“.

c) *Trisecțiunea unghiului*, adică împărțirea unui unghi oarecare în trei părți egale.

d) *Cvadratura cercului*, adică construirea unui pătrat care să aibă o suprafață egală cu aceea a unui cerc dat.

Se cerea ca aceste probleme să fie rezolvate exact, folosind numai compasul și o riglă negradată.

Cu toată simplitatea lor aparentă, aceste probleme nu pot fi rezolvate numai cu rigla și compasul, lucru care a fost stabilit abia în a doua jumătate a secolului al XIX-lea.

Pînă atunci, iar în parte și după aceea, foarte mulți oameni, în special matematicieni diletanți, își iroseau vremea și energia în încercări fără sorți de izbîndă de a rezolva aceste probleme. Printre cauzele care făceau imposibilă rezolvarea menționăm la problema (b) faptul că latura cubului trebuie să fie $1\sqrt[3]{2}$ unde $\sqrt[3]{2}$ este un număr irațional, iar la problema (d) suprafața cercului este legată de asemenea de numărul irațional π .

Imposibilitatea rezolvării acestei ultime probleme a fost demonstrată în mod definitiv de Lindemann în anul 1882.

Istoricul acestor probleme, despre care s-au scris multe cărți și broșuri, arată însă, că din încercările infructuoase de a le rezolva, s-au dezvoltat ramuri foarte importante ale științei matematice moderne.

Pe de altă parte, au fost cazuri, cînd s-a recurs la construirea unor instrumente pentru rezolvarea unora din aceste probleme. Astfel celebrul Arhimede a reușit să găsească un mijloc „mecanic” pentru rezolvarea problemei (c), procedeul bandei de hîrtie (fig. 13).

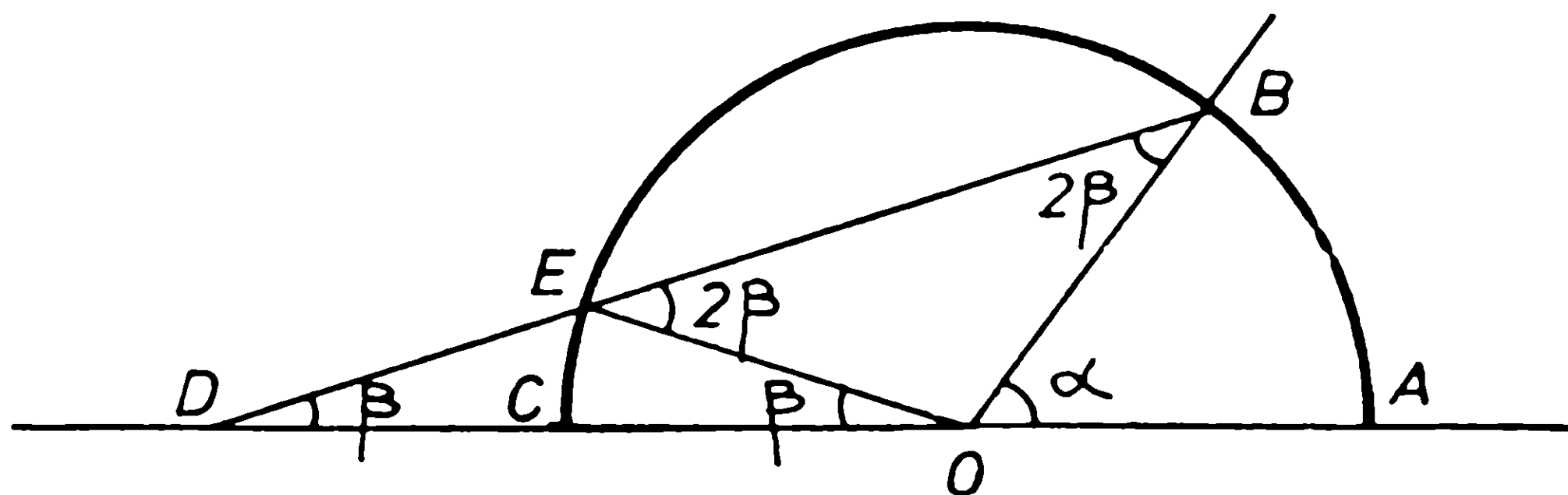


Fig. 13.

Fie unghiul dat α pe care urmează să-l împărțim în trei părți egale. Din vîrfurile O al unghiului și cu o rază oarecare descriem un semicerc ABC. Prelungim diametrul CA înspre partea opusă lui A. Luăm o bandă de hîrtie cu marginea dreaptă și însemnăm pe această margine o lungime DE egală cu raza semicercului. Așezăm banda de hîrtie astfel ca marginea ei să treacă prin punctul B, punctul D să cadă pe prelungirea diametrului; iar punctul E pe semicerc. Triunghiul DOE este isoscel.

Se poate, acum, stabili ușor că $\beta = \frac{\alpha}{3}$.

Mai tîrziu, M. d'Ocagne, Nicholson, abatele Théophile Moreaux și alții au obținut noi rezultate în rezolvarea acestei probleme. Pentru simplitate, arătăm modul de construcție al unui trisector imaginat de abatele Moreaux (meteorologist și astronom francez, secolul al XIX-lea):

Pe o hîrtie groasă desenăm un triunghi isoscel ABC, BC fiind baza (fig. 14).

Din centrul C, ca centru, descriem un semicerc cu raza egală cu mijlocul bazei BC, adică egală cu CD. Tăiem hîrtia în jurul lui AB, în lungul lui AD și pe marginea cercului; de asemenea tăiem în lungul razei CE.

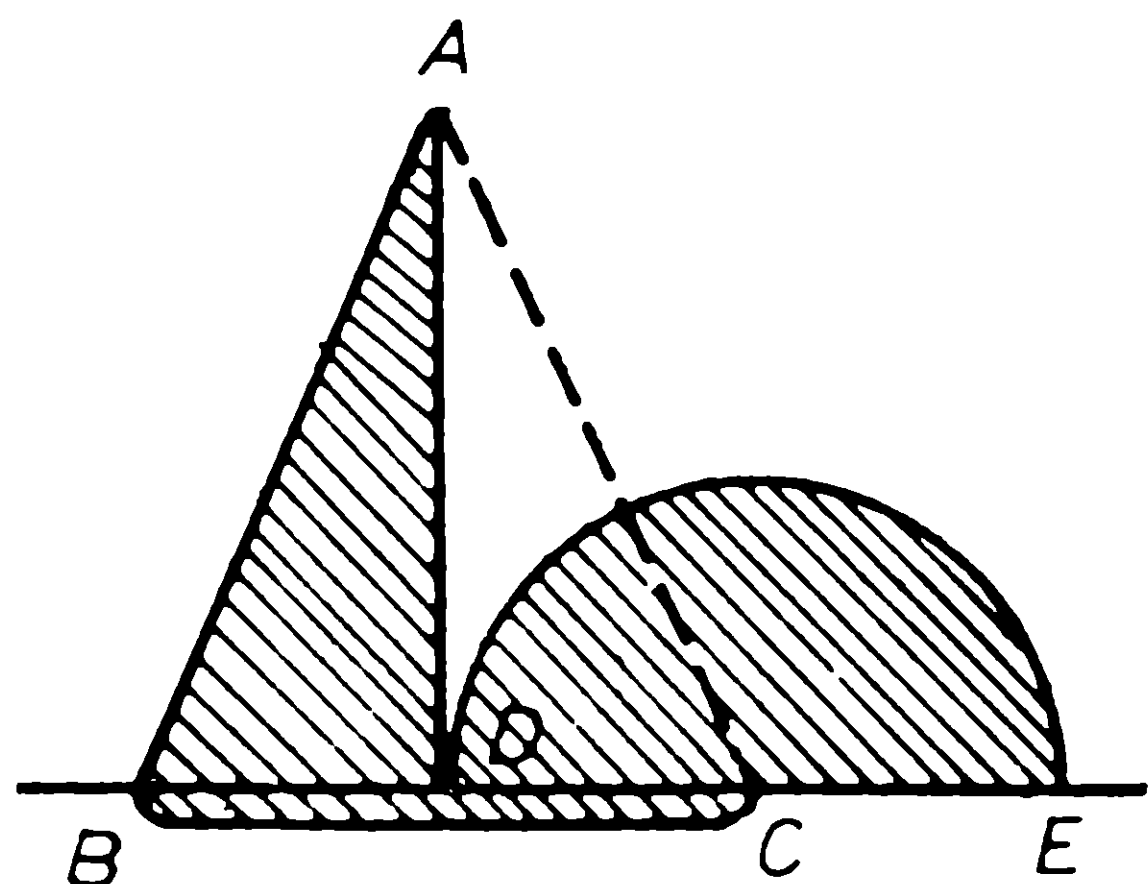


Fig. 14.

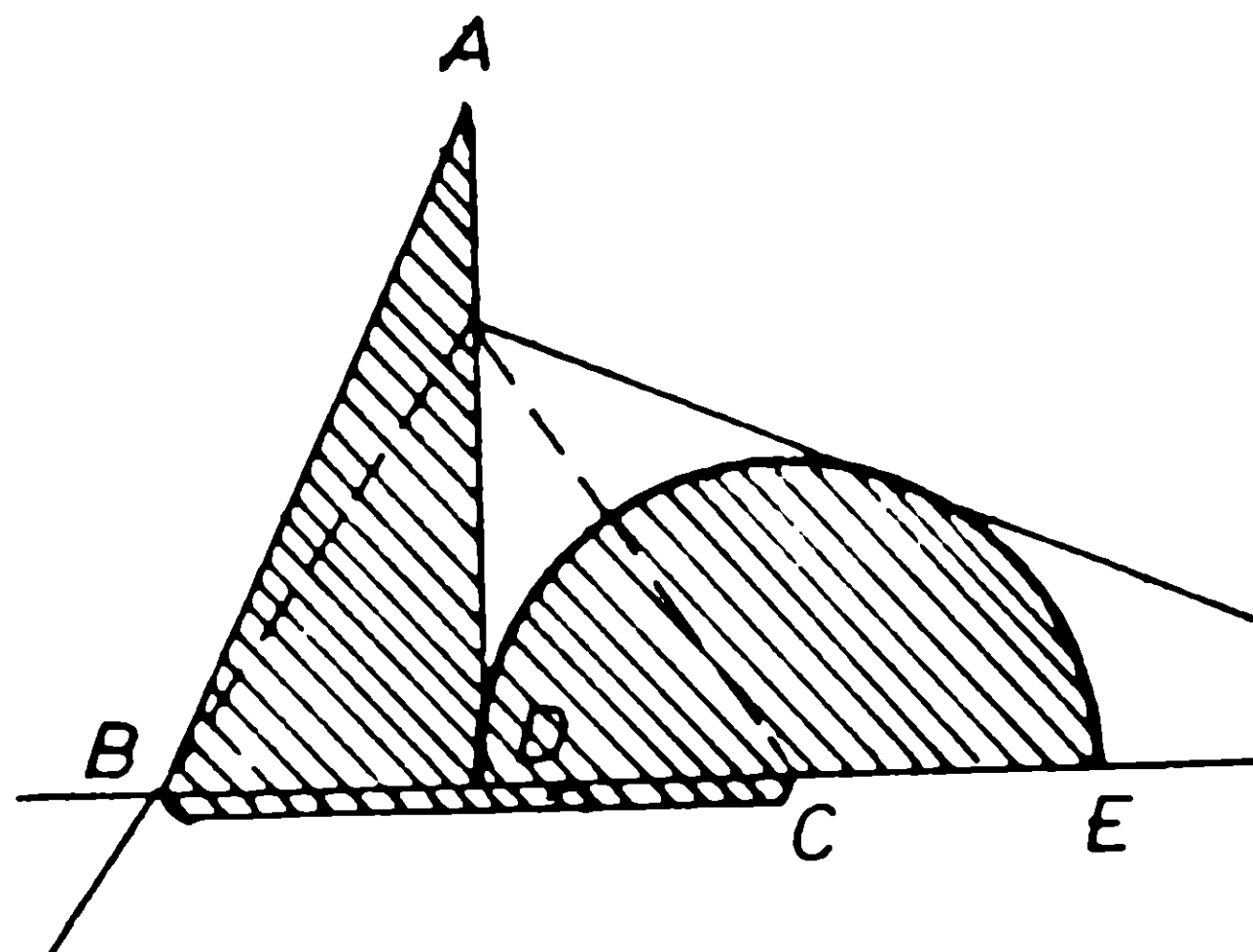


Fig. 15.

În partea de jos a triunghiului și a cercului lăsăm o mică prelungire (fișie), care să permită semicercului să se țină legat de triunghi. Fie unghiul xoy (fig. 15) pe care ne propunem să-l împărțim în trei părți egale.

Mînuim trisectorul astfel ca în timp ce punctul B este pe latura ox , înălțimea AD să treacă prin O, iar cercul să fie tangent laturii oy într-un punct F.

Cînd punctul B, latura AD și semicercul îndeplinesc aceste condiții, ca în figură, unghiul xoy este împărțit în trei părți egale: $\widehat{BOD} = \widehat{DOC} = \widehat{COF}$.

Un model simplu de trisector a propus și profesorul Neculai Iorga în G.M. 3/1968.

2. O altă problemă a antichității, devenită celebră, este *problema despre taurii Soarelui* (problema taurilor lui Helios), cunoscută și sub denumirea *problema taurilor din Helicon*¹:

*„Iar cînd scăparăm noi de stînci, de Scila
Și de Charibda cea cumplită, iată
Ne pomenirăm la insula cea sfîntă
A zeului. Acolo erau boii
Cei mîndri și frunțoși, oi multe grase
De-a Soarelui“ ...*

(Homer, *Odiseea*, cîntul al XII-lea.)

Și se adevăra proorocirea lui Circe:

„Vei sosi în insula Trinacria, unde pasc boii și oile Soarelui, cîte 7 cirezi de fiecare fel și fiecare de cîte 50 de capete. Aceste vite nu fată și nici nu mor și nici nu îmbătrînesc, iar fetele Soarelui, acele zîne cu păr de aur, pasc turmele“ ...

Pe această temă, Arhimede a compus următoarea problemă, pe care a propus-o lui Erathostene din Cyrena pentru matematicienii din Alexandria:

„Calculează-mi, prietene, numărul vitelor cornute ale lui Helios, dar să te gîndești serios, dacă ai pretenția că ești om de știință.

Cîte pasc în cîmpiile Siciliei, insula cu 3 unghiuri? Ele se împart în 4 cirezi de culori diferite. Unele sînt albe ca laptele, altele de un negru strălucitor, altele roșii, iar ultimele bălțate.

Fiecare cireadă are un număr mare de tauri și sînt unii față de alții în acest raport:

1. *Cei albi sînt atîția cît $1/2$ și $1/3$ împreună din cei negri, plus toți cei roșii;*

2. *Cei negri sînt cît $1/4$ și $1/5$ din cei bălțați plus toți cei roșii;*

3. *Cei bălțați sînt $1/6$ și $1/7$ din taurii albi, plus numărul total al celor roșii;*

4. *Vacile cele albe sînt $1/3 + 1/4$ din întreaga cireadă neagră;*

5. *Cele negre $1/4 + 1/5$ din toată cireada bălțată, cînd vacile pasc la un loc cu taurii;*

6. *Cele bălțate fac $1/5 + 1/6$ din cireada vitelor roșii;*

7. *Cele roșii fac cît $1/6 + 1/7$ din toată turma albă.*

Dacă-mi spui numărul cornutelor Soarelui, separat numărul taurilor bine hrăniți și pe cel al vacilor, și cîte din fiecare culoare, nu vei fi considerat nepriceput sau neiscusit în calcule, dar nu vei fi socotit încă printre învățați. Căci iată ce se mai știe despre aceste vite ale lui Helios:

8. *Atunci cînd mulțimea taurilor albi se unește cu aceea a celor negri, ei formează împreună o figură pătrată, iar marea lor întindere umple toată suprafața insulei cu trei unghiuri.*

¹ Mitologie: munte în Beoția, locuit de Apollon și de muze.

9. În fine, dacă taurii roșii se așază pe rînduri, împreună cu cei bălțați, începînd cu unu și crescînd succesiv cu cîte unu, ei formează figura unui triunghi, fără să fie printre ei tauri de altă culoare și fără să se observe lipsa acestora.

Dacă vei afla și vei putea arăta care sînt aceste numere, atunci înaintează glorios și triumfător, prietene, convins fiind că ești un om desăvîrșit în această știință“.

(Descoperită în 1773 de către Lessing într-un manuscris grecesc necercetat pînă atunci).

Răspunsul indicat în manuscris era următorul:

„Fie A numărul taurilor albi și a numărul vacilor albe;

N numărul taurilor negri și n numărul vacilor negre;

R „ „ roșii „ r „ „ roșii ;

B „ „ bălțați „ b „ „ bălțate;

$$\left. \begin{aligned} A &= 829\,318\,560 = \frac{5}{6}N + R \\ a &= 576\,508\,800 = \frac{7}{12}(N + n) \end{aligned} \right\} A + a = 1\,405\,827\,360$$

$$\left. \begin{aligned} N &= 596\,841\,120 = \frac{9}{20}B + R \\ n &= 391\,459\,680 = \frac{9}{20}(B + b) \end{aligned} \right\} N + n = 988\,300\,800$$

$$\left. \begin{aligned} B &= 588\,644\,800 = \frac{13}{42}A + R \\ b &= 281\,265\,600 = \frac{11}{30}(R + r) \end{aligned} \right\} B + b = 869\,910\,400$$

$$\left. \begin{aligned} R &= 331\,950\,960 \\ r &= 435\,137\,040 = \frac{13}{42}(A + a) \end{aligned} \right\} R + r = 767\,088\,000$$

$$\text{În total} = 4031126560''$$

Rezolvarea modernă (vezi *Probleme celebre* de Florica T. Câmpan):

a) Cu notațiile de mai sus, traduse în limbaj algebric și în ordinea indicată de text, cele 9 condiții impuse de problemă sînt:

$$A = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)N + R$$

$$N = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)B + R$$

$$B = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right)A + R$$

$$a = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) (N + n)$$

$$n = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) (B + b)$$

$$b = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} \right) (R + r)$$

$$r = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7} \right) (A + a)$$

$A + N$ să fie un pătrat

$R + B$ să fie un număr triunghiular.

Problema are 8 necunoscute care sînt legate în prima parte a acesteia prin 7 condiții la care se adaugă, în partea a doua, încă două condiții.

Deci avem de rezolvat un sistem de ecuații nedeterminate.

Rezolvăm mai întîi sistemul format de primele trei ecuații. Eliminăm pe N și B :

$$\left\{ \begin{array}{l} 6A = 5N + 6R \\ 20N = 9B + 20R \\ 42B = 13A + 42R \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4 \\ 1 \end{array} \rightarrow 24A = 9B + 44R$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 24A = 9B + 44R \\ 42B = 13A + 42R \end{array} \right\} \begin{array}{l} 14 \\ 3 \end{array} \rightarrow 297A = 742R$$

$$A = \frac{743}{297} R$$

Introducînd A în primele 2 ecuații se obține:

$$N = \frac{178}{99} R; \quad B = \frac{1580}{891} R.$$

Rezolvăm acum sistemul format cu celelalte 4 ecuații:

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{7}{12} (N + n) \\ n = \frac{9}{20} (B + b) \\ b = \frac{11}{30} (R + r) \\ r = \frac{13}{42} (A + a) \end{array} \right\} \begin{array}{l} 4800 \\ 2800 \\ 1260 \\ 462 \end{array}$$

$$4800a + 2800n + 1260b + 462r = 2800(N + n) + 1260(B + b) + 462(R + r) + 143(A + a)$$

$$4657a = 2800N + 1260B + 462R + 143A$$

Înlocuind pe N, B și A cu valorile obținute anterior rezultă:

$$297 = 4 \cdot 657a = 2402120R$$

$$a = \frac{2402120}{297 \cdot 4657} \quad R = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 23 \cdot 373}{3^3 \cdot 11 \cdot 4657} R$$

Apoi din ecuațiile VII, VI, V obținem succesiv:

$$r = \frac{13 \cdot 46 \cdot 469}{3^3 \cdot 11 \cdot 4657} R$$

$$b = \frac{2^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 761}{3^3 \cdot 4657} R$$

$$n = \frac{2 \cdot 17 \cdot 15991}{3^3 \cdot 11 \cdot 4657} R$$

unde R trebuie să fie divizibil cu $3^3 \cdot 11 \cdot 4657 = 4149387$

Rezultă $R = 3^4 \cdot 11 \cdot 4657x$, unde x este un număr întreg oarecare. Deci:

$$A = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 53 \cdot 4657x = 10366482x$$

$$N = 2 \cdot 3^2 \cdot 89 \cdot 4657x = 7460514x$$

$$B = 2^2 \cdot 5 \cdot 79 \cdot 4657x = 7358060x$$

$$R = 3^4 \cdot 11 \cdot 4657x = 4149387x$$

$$a = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 373x = 7206360x$$

$$n = 2 \cdot 3^2 \cdot 17 \cdot 15991x = 4893246x$$

$$b = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 761x = 3515820x$$

$$r = 3^3 \cdot 13 \cdot 46469x = 5439213x$$

Dacă în aceste ecuații luăm pentru x valoarea 80, se obțin rezultatele indicate ca răspuns în manuscris.

b) Pentru ca $A+N$ să fie un pătrat, trebuie să avem:

$$A+N=Z^2, \text{ deci:}$$

$$Z^2 = 2 \cdot 3 \cdot 4657x(7 \cdot 53 + 3 \cdot 89)$$

$$Z^2 = 2^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657x \rightarrow X = 3 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 4657 t^2$$

Pentru ca $R+B$ să fie număr triunghiular trebuie să avem:

$$R+B = \frac{n(n+1)}{2} = 4657^2 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 29 t^2 \cdot (2^2 \cdot 5 \cdot 79 + 3^4 \cdot 11)$$

$$R+B = \frac{n(n+1)}{2} = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353 \cdot 4657^2 \cdot t^2$$

$$\text{Notez: } 2(n+1)=U$$

$$2 \cdot 4657 t = V$$

Înmulțind cu 8 avem:

$$4n(n+1)=2n(2n+2)=(n-1)(n+1)=n^2-1=2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 29 \cdot 353v^2$$

Făcînd produsul putem scrie ultima ecuație sub forma:

$u^2=1+4\,729\,494\,v^2$, deci o ecuație de forma: $cv^2+1=u^2$ cunoscută în matematici sub numele de ecuația lui Pell (*John Pellius*, începutul sec. al XVII-lea).

Rezolvînd această ecuație în numere întregi, J. Fr. Wurm găsește că numărul total de cornute este de 5916837175686. Față de suprafața insulei, ar reveni un spațiu de aproximativ 23 m² pentru fiecare vită.

3. La francezi, matematicianul Fermat (1601—1665) a enunțat o altă problemă, care a devenit celebră, nefiind complet rezolvată nici astăzi:

„Să se demonstreze că, pentru $n > 2$, ecuația $x^n + y^n = z^n$ nu se poate rezolva în numere întregi“.

Această problemă, cunoscută și sub numele de „marea teoremă“ a lui Fermat se mai poate enunța astfel: *„Suma a două numere întregi ridicată la aceeași putere nu poate fi egală cu un al treilea număr întreg ridicat și el la aceeași putere“*. Excepție face numai puterea a doua pentru care acest fapt este posibil.

Pentru rezolvarea acestei probleme s-a oferit enorma sumă de 100 000 mărci germane.

Cu toate eforturile unora din cei mai mari matematicieni, această teoremă nu a putut fi demonstrată, dar nici infirmată prin găsirea unui exemplu care s-o contrazică.

S-a putut demonstra teorema pentru diferite cazuri particulare: pentru $n=3$ (Legendre), pentru $n=4$ și $n=7$ (Euler) etc.

E. Kummer a demonstrat-o pentru un grup destul de mare de puteri și, printre altele, pentru toți exponenții mai mici ca 100, dar nu pentru orice valoare a lui n (prim și mai mare decît 2).

Celebritatea acestei probleme este datorită doar faptului că a rezistat pînă în prezent tuturor încercărilor.

Ea prezintă, însă, un deosebit interes istoric. În încercările de a soluționa problema, matematicianul E. E. Kummer a construit o teorie numită a „idealelor“, în care el generalizează noțiunea de factor prim și teoria descompunerii în factori primi, teorie fundamentală în algebra modernă.

4. La englezi, matematicianul E. Waring a enunțat următoarea problemă, rămasă nerezolvată timp de aproape 150 de ani.

„Să se demonstreze că orice număr întreg poate fi reprezentat ca o sumă de puteri a n —a ale altor numere“.

Abia în 1907, Hilbert a dat o demonstrație completă teoremei lui Waring. Demonstrația era însă foarte complicată.

După 10—15 ani Hardy, împreună cu Littlewood, în Anglia și, independent de ei, Vinogradov în U.R.S.S., au dat o demonstrație analitică mai simplă acestei teoreme.

Vinogradov a reușit cu ajutorul metodei sumelor trigonometrice să demonstreze, că orice număr impar mai mare decît un anumit număr poate fi scris ca o sumă de cel mult trei numere prime.

O demonstrație elementară a teoremei a fost dată în 1942 de către matematicianul sovietic Linnik.

5. O frumoasă problemă aditivă din teoria numerelor (probleme în care numerele naturale sînt reprezentate ca sume de numere prime sau de un anumit tip), nerezolvată încă pînă în zilele noastre, o constituie *problema lui Goldbach*, formulată în anul 1742.

În problemă se afirmă că: „*Orice număr par, $2n$, poate fi reprezentat ca o sumă de două numere prime impare*“.

Unele rezultate obținute de Șnirelman și I. M. Vinogradov ne apropie de rezolvarea problemei lui Goldbach.

6. *Teorema lui Van der Waerden* a progresiilor aritmetice.

În cadrul școlii matematice de la Göttingen a fost făcută ipoteza că dacă mulțimea numerelor naturale este împărțită într-un mod oarecare în două părți disjuncte, atunci cel puțin una din aceste părți conține progresii aritmetice de lungime oricît de mare dorim (cu un număr de termeni oricît de mare).

Problema a fost rezolvată în anul 1928 de Van der Waerden, în condiții mai generale decît cele cerute, care a demonstrat următoarea *teoremă*: Fie k și l două numere naturale. Există un număr natural $n = n(k, l)$, astfel că pentru orice partiție în k clase a oricărui segment de lungime n , cel puțin una dintre clase conține o progresie aritmetică de lungime l .

7. La congresul internațional al matematicienilor din 1900, Hilbert a prezentat un referat despre problemele grele nerezolvate la acea dată. Sub numărul 7 se găsea *problema numerelor transcendente* (numere care nu pot fi rădăcini ale unei ecuații cu coeficienți întregi).

Deși s-a demonstrat că există foarte multe numere transcendente (o infinitate mai numeroasă decît a numerelor algebrice) nu se cunoșteau în mod concret decît cîteva (e , π și altele).

Hilbert a emis ipoteza că „*orice număr de forma α^β , unde α este un număr algebric $0 \neq \alpha \neq 1$ și β irațional, este transcendent*“.

Demonstrația a fost pusă la punct în jurul anului 1930, prin contribuția mai multor matematicieni, printre care un rol deosebit l-a avut savantul sovietic A. O. Ghelfond.

4. Probleme criptaritmetice

— calcule cifrate —

Sînt probleme în care se cere restabilirea calculului prin raționamente succesive, bazate pe proprietăți ale numerelor sau ale operațiilor pe care le facem.

1. Să se găsească cifrele înlocuite prin * în înmulțirea:

$$\begin{array}{r}
 4 * * \\
 * 2 * \\
 \hline
 * * 4 * \\
 * 1 2 \\
 * 3 * * \\
 \hline
 * * * * * 8
 \end{array}$$

(Din G.M.F. XII-2)

2. Să se reconstituie următoarea operație aritmetică „cu cifre șterse”:

$$\begin{array}{r}
 3 * * \\
 * 3 * \\
 \hline
 * * 9 * \\
 * 4 5 \\
 * * 6 * \\
 \hline
 * * * * * 0
 \end{array}$$

3. Să se restabilească înmulțirea:

$$\begin{array}{r}
 * 1 * \times \\
 3 * 2 \\
 \hline
 * 3 * \\
 3 * 2 * \\
 * 2 * 5 \\
 \hline
 1 * 8 * 3 0
 \end{array}$$

4. Să se restabilească împărțirea următoare, la care nu cunoaștem decît a doua cifră a cîtului (7)¹

* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * 	* * * * 7 * * * * * * * 7 * * *
--	---

5. Să se decripteze împărțirea:

* 2 * 5 * * * * * 0 * * * 9 * * * 5 * * 5 * 3 2 5 1 * * 	* 2 * 5 * * * * * 0 * * * 9 * * * 5 * * 5 * 3 2 5 1 * *
---	---

6. Să se restabilească următoarea împărțire misterioasă:

* * * * * 4 * * * * * 4 * * * * * * * * * * 4 * * * * * * * * * * * * * 4 * * 	* * * * * 4 * * * * * 4 * * * * * * * * * * 4 * * * * * * * * * * * * * 4 * *
---	---

7. După felul cum este scrisă următoarea împărțire, găsiți ce cifre erau în locul fiecărei steluțe:

* * * * * : * * * = * 8 * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * 4 * * 	* * * * * : * * * = * 8 * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * 4 * *
---	---

¹ Din *Culegerea de probleme de aritmetică* a lui Ion Ionescu.

8. Să se dezlege următoarele operații aritmetice cifrate (rebusuri cu numere):

a)
$$\begin{array}{r} A\ B\ C\ \times \\ B\ A\ C \\ \hline * * * * \\ * * A \\ * * * B \\ \hline * * * * * *^{1)} \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r|l} A\ D\ IO & I\ O \\ \hline I\ O & \hline C\ I & D\ I\ O \\ O\ B & \\ \hline D\ I\ O & \\ D\ I\ O & \\ \hline = & = & = \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} * * * \times \\ * 2 * \\ \hline * * * \\ * * * * \\ * 8 * \\ \hline * * 9 * 2 * \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} A\ T\ O\ M\ \times \\ A\ T\ O\ M \\ \hline * * * * * \\ * * * * * \\ * * * * * \\ * * * * * \\ \hline * * * * A\ T\ O\ M \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{r|l} * * 7 * * * * * * * * & * * * * 7 * \\ * * * * * * & \hline * * * * 7 7 * & * * 7 * * \\ * * * * * * * & \\ \hline * 7 * * * * & \\ * 7 * * * * & \\ \hline * * * * * * * & \\ * * * * 7 * * & \\ \hline * * * * * * & \\ * * * * * * & \\ \hline = & = & = & = & = & = \end{array}$$

(B. A. Kordemski, *Matematica distractivă*)

Probleme cu lege de compoziție

Sînt probleme care se rezolvă, ținînd seama de legea de compoziție dată. Spunem că pe o mulțime E există o lege de compoziție (operație) dacă la fiecare pereche ordonată (a, b) de elemente din E, distincte sau nu, putem face să corespundă în mod unic, un element C din E. În forma cea mai generală, avem: $c=a*b$, unde c este compusul lui a și b, iar * este un semn convențional, care indică existența unei legi de compoziție.

1. Definim operația * astfel:

$$a*b=a-b+\frac{a}{b} \quad (b\neq 0)$$

¹ Notă: la cifre diferite, corespund litere diferite.

Notăm cu x_1 soluția ecuației $x*a=0$ și cu x_2 soluția ecuației $x*a=1$.

Să se arate că $x_1*x_2=0$

Liviu Pîrșan

Soluție.

$x*a = x - a + \frac{x}{a}$. Pentru a afla pe x_1 avem $x*a=0$, adică $x - a + \frac{x}{a} = 0$

sau $\frac{a+1}{a}x = a$, deci $x_1 = \frac{a}{a+1}$

Pentru a afla pe x_2 avem: $x*a=1$, adică $x - a + \frac{x}{a} = 1$, de unde $x_2 = a$.

Avem: $x_1*x_2 = \frac{a^2}{a+1} * a = \frac{a^2}{a+1} - a + \frac{a}{a+1} = \frac{a^2 - a^2 - a + a}{a+1} = 0$,

deci $x_1*x_2=0$

2. Se consideră în mulțimea R a numerelor reale, următoarea lege de compoziție:

$$a*b = e^{a+b}, \quad a \in R, \quad b \in R.$$

a) Să se arate că oricare ar fi numerele reale a și c ($a < c$) există totdeauna cel puțin un număr real b ($a < b < c$) astfel încît

$$(a*b')*c = a = (b'*c), \text{ unde } b' = -b$$

De asemenea să se verifice că:

$(a*b)*a = a*(b*a)$ oricare ar fi numerele reale a și b .

b) Să se rezolve ecuația $x*3*x = e^{-2}$

Rezolvare.

a) Fie două numere reale a și c , $a < c$. Să căutăm numere reale x pentru care: $(a*x)*c = a*(x*c)$.

Aceasta implică: $e^{a+x} + c = a + e^{x+c}$, ceea ce este echivalent cu $e^x = \frac{e^a - e^c}{a - c}$ (1)

Dar în baza teoremei lui Lagrange rezultă că există cel puțin un punct b , $a < b < c$, astfel încît

$$\frac{e^a - e^c}{a - c} = e^b$$

În baza acestei relații, (1) devine $e^{-x} = e^b$, adică $x = -b = b'$ ceea ce demonstrează afirmația făcută.

Relația $(a*b)*a = a*(b*a)$ se reduce, în acest caz, la $e^{a+b} + a = a + e^{b+a}$, ceea ce reprezintă o identitate.

b) În baza celor arătate la punctul a), avem:

$(x*3)*x = x*(3*x)$ oricare ar fi numărul real x , ceea ce permite scrierea în forma $x*3*x$

Ecuația $x*3*x = e^{-2}$ este echivalentă cu $e^{x+e^{3+x}} = e^{-2}$ sau $e^{3+x} = -x - 2$, care admite soluția unică $x = -3$.

(G.M., II — 1966)

3. Considerăm operația $*$ astfel definită:

$$m*n = \frac{m}{n-m} + n, \quad (n \neq m)$$

Să se rezolve sistemul:

$$(x + by)*a = 0$$

$$(ax - y)*b = 0$$

(G.M., VI — 1964)

5. Erori și paradoxuri matematice

Eroarea și paradoxul constituie cele două fețe ale absurdului în matematică.

Eroarea matematică constă, prin definiție, în contrazicerea unui rezultat corect, presupus cunoscut.

Paradoxul rezultă dintr-un raționament matematic, aparent corect, care duce la o concluzie logică, contrară opiniei curente (*para* — contra și *doxa* — opinie).

Paradoxurile sau antinomiile sînt construcții logice, în aparență ireproșabile, dar care duc la rezultate absurde.

Pentru eludarea acestor contradicții, logicianul englez Bertrand Russell introduce teoria tipurilor logice, teorie care derivă din principiul cercului vicios. Russell stabilește o ierarhie logică a conceptelor, adică: indivizii, obiecte logice de tipul t_0 ; proprietățile indivizilor, concepte de tipul t_1 , t_2 etc. Teoria tipurilor stabilește că nu se poate aplica un concept de tipul n , decît unui concept de tipul $n-1$. Cu aceste restricții soluția paradoxurilor constă, în fond, în reducerea acestora la probleme inexistente care nu se pun pentru că, punîndu-le, se anulează înseși definițiile care urmau să le servească drept fundament.

a. Erori matematice

Întîlnim aci probleme rezolvate corect din punct de vedere formal, dar greșite din punctul de vedere al rezultatului (concluziilor) obținute. Multe din aceste greșeli sînt axate pe simplificarea prin zero; altele au la bază premise false bine mascate. Descoperirea lor implică o ascuțire a raționamentului, dezvoltă spiritul de observație și deprinderea de a gîndi, contribuind, astfel, la aprofundarea cunoștințelor de matematică.

1. Plecînd de la inegalitatea indiscutabilă

$$4 - 10 = 9 - 15$$

se demonstrează că $2 = 3$.

Într-adevăr, adăugînd la ambii membri $6\frac{1}{4}$ avem:

$$4 - 10 + 6\frac{1}{4} = 9 - 15 + 6\frac{1}{4}.$$

Apoi scriem fiecare termen sub altă formă:

$$2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2$$

$$\left(2 - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(3 - \frac{5}{2}\right)^2 \quad \text{sau} \quad 2 - \frac{5}{2} = 3 - \frac{5}{2}$$

În ce constă greșeala?

2. Să se demonstreze că $7=5$

Considerăm identitatea:

$$7^2 - 5^2 = 2 \cdot 7 \cdot 6 - 2 \cdot 5 \cdot 6$$

Trecînd pe 5^2 în membrul al doilea și pe $2 \cdot 7 \cdot 6$ în primul avem: $7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 6 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6$.

Adunînd la ambii membri ai identității pe 6^2 , obținem o egalitate între două pătrate perfecte:

$$7^2 - 2 \cdot 7 \cdot 6 + 6^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 + 6^2$$

Restrîngem pătratele și obținem:

$$(7-6)^2 = (5-6)^2, \text{ de unde rezultă:}$$

$$7-6=5-6 \quad \text{sau} \quad 7=5$$

Cum se explică acest rezultat paradoxal?

3. *Orice cantitate este egală cu jumătatea ei.*

„Demonstrație“. Fie a și b două cantități egale: $a=b$. Să înmulțim ambii termeni ai egalității cu a ; $\rightarrow a^2=ab$.

Să micșorăm acum cu b^2 amîndoi membrii ai egalității. Diferențele obținute vor fi și ele egale: $a^2-b^2=ab-b^2$.

Descompunînd în factori, expresia devine:

$$(a+b)(a-b)=b(a-b)$$

Simplificăm cu $a-b$ și obținem egalitatea: $a+b=b$; dar $b=a$, deci putem scrie: $a+a=a$ sau $2a=a$; $a=\frac{a}{2}$.

Unde este greșeala?

4. Să se descopere greșeala în „demonstrația“: $2 \cdot 2=5$ (!)

Considerăm egalitatea: $16-36=25-45$.

Adăugăm în ambele părți ale egalității $20\frac{1}{4}$ și obținem:

$$16 - 36 + 20\frac{1}{4} = 25 - 45 + 20\frac{1}{4} \text{ de unde:}$$

$$4^2 - 2 \cdot 4 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{9}{2} + \left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$\text{sau: } \left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 \rightarrow 4 - \frac{9}{2} = 5 - \frac{9}{2}$$

Deci $4=5$ sau $2 \cdot 2=5$ (!?)

5. O fracție supraunitară este egală cu unitatea.

Considerăm ecuația:

$\frac{3x-b}{3x-5b} = \frac{3a-4b}{3a-8b}$ în care $b \neq 0$ și care se prezintă sub forma de egalitate între două fracții supraunitare, deoarece:

$$3x-b > 3x-5b \text{ și } 3a-4b > 3a-8b$$

Scriem că într-un șir de fracții egale, diferența numărătorilor formează o fracție egală cu cele date, deci:

$$\frac{3x-3a+3b}{3x-3a+3b} = \frac{3x-b}{3x-5b} \quad (1) \text{ și } 1 = \frac{3x-b}{3x-5b}$$

Deci o fracție supraunitară este egală cu unitatea. Egalitatea (1) este însă numai aparentă, deoarece rezolvînd ecuația dată găsim: $x=a-b$ și, înlocuind valoarea lui x în expresia (1), obținem: $\frac{3a-3a+3b}{3x-3a+3b} = \frac{0}{0}$

adică o nedeterminare și nu egalitate cu 1.

6. Ne propunem să arătăm că 4 lei=40 000 bani.

Ridicăm la pătrat egalitatea evidentă: 2 lei=200 bani și obținem 4 lei=40 000 bani (!?)

7. Toate numerele sînt egale.

Fie a și b două numere oarecare a căror diferență este c , astfel că vom avea: $a-b=c$

Înmulțind ambii membri ai egalității cu $(a-b)$ vom avea:

$$(a-b)^2 = c(a-b) \text{ sau:}$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = ac - bc$$

de unde: $a(a-b-c) = b(a-b-c)$ (1) și deci: $a=b$

Cum am luat pe a și b numere oarecare, se poate afirma că toate numerele sînt egale ... dacă nu observăm că avînd $a-b=c$, atunci $a-b-c=0$ și deci nu putem simplifica egalitatea (1) cu acest factor.

8. Farsa logaritmică

Pornind de la inegalitatea evidentă

$$\frac{1}{4} > \frac{1}{8},$$

cu ajutorul logaritmilor vom demonstra că $2 > 3$.

Facem următoarele transformări algebrice:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 > \left(\frac{1}{2}\right)^3; \quad 2\lg_{10}\left(\frac{1}{2}\right) < 3\lg_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$$

După simplificarea cu $\lg_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$ avem: $2 > 3$.

Care este greșeala în această demonstrație?

9. Cum se poate arăta că un număr negativ este mai mare decât un număr pozitiv.

Considerăm două numere pozitive a și b .

Rapoartele $\frac{a}{-b}$ și $\frac{-a}{b}$ vor fi evident egale: $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$

Dacă într-o proporție numărătorul primului raport este mai mare ca numitorul, atunci și numărătorul celui de-al doilea raport va fi mai mare ca numitorul său. Deci dacă $a > -b$, avem și $-a > b$.

În ce constă greșeala care conduce la acest paradox?

10. O parte a unui segment de dreaptă este egală cu segmentul întreg.

Să luăm un triunghi oarecare ABC (fig. 16) la care unghiul din A să fie mai mare decât celelalte două:

Ducem din A o dreaptă AD care împreună cu AB să formeze un unghi egal cu unghiul C. Tot din A coborâm perpendiculara AE pe BC. Triunghiul ABC și ABD, având unghiurile egale, sînt asemenea.

Se știe că suprafețele poligoanelor sînt proporționale cu pătratele laturilor lor omologe, deci în cazul triunghiurilor amintite,

$$\frac{\text{aria } ABC}{\text{aria } ABD} = \frac{AC^2}{AD^2}$$

Deoarece triunghiurile au aceeași înălțime, ariile vor fi proporționale cu bazele lor, $\frac{\text{aria } ABC}{\text{aria } ABD} = \frac{BC}{BD}$,

Din aceste două egalități rezultă:

$$\frac{AC^2}{AD^2} = \frac{BC}{BD} \quad \text{sau} \quad \frac{AC^2}{BC} = \frac{AD^2}{BD} \quad (1)$$

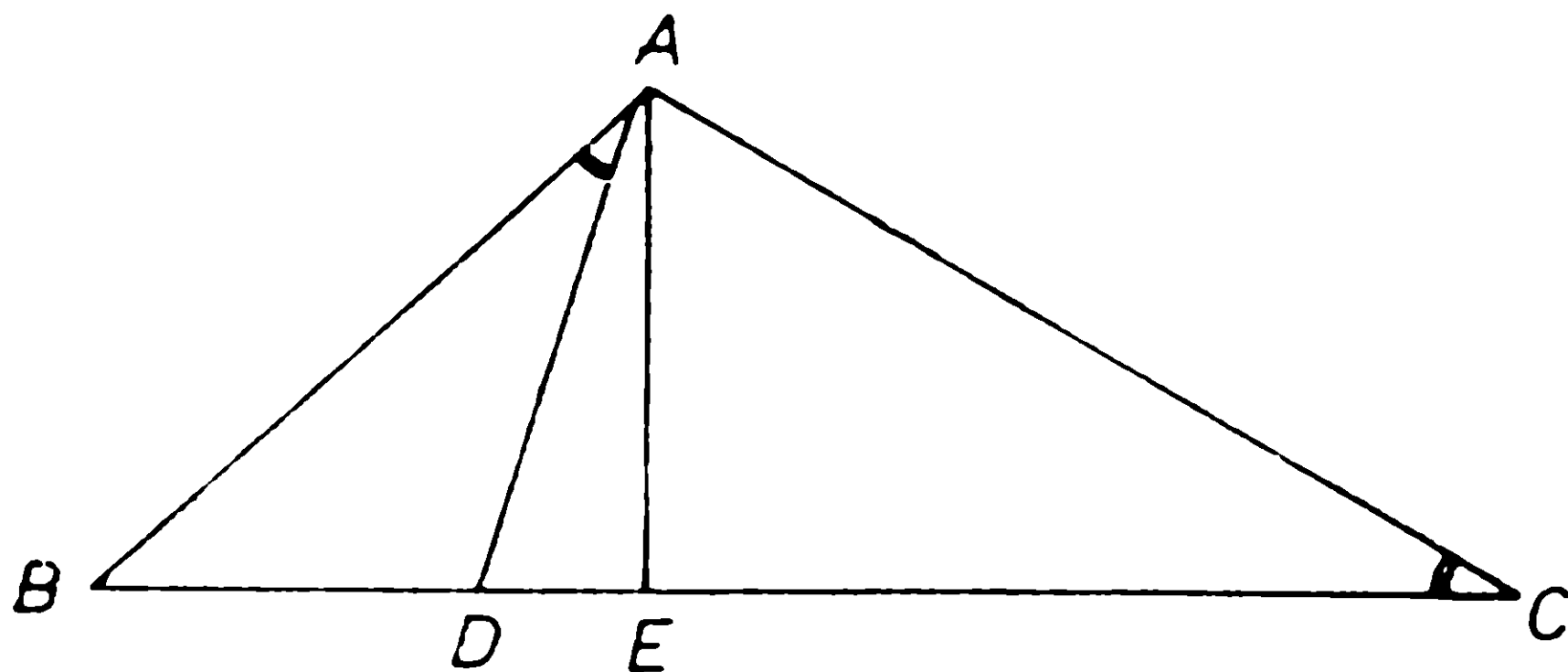


Fig. 16.

Dar, conform teoremei lui Pitagora generalizată,

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC \cdot BE \quad \text{și}$$

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2BD \cdot BE$$

Înlocuind aceste valori în egalitatea (1), obținem succesiv:

$$\frac{AB^2 + BC^2 - 2BC \cdot BE}{BC} = \frac{AB^2 + BD^2 - 2BD \cdot BE}{BD}$$

$$\frac{AB^2}{BC} + BC - 2BE = \frac{AB^2}{BD} + BD - 2BE$$

$$\frac{AB^2}{BC} - BD = \frac{AB^2}{BD} - BC, \text{ de unde}$$

$$\frac{AB^2 - BD \cdot BC}{BC} = \frac{AB^2 - BD \cdot BC}{BD},$$

$$(AB^2 - BD \cdot BC)BD = (AB^2 - BD \cdot BC) \cdot BC \quad (2)$$

Simplificînd ambele părți prin $(AB^2 - BD \cdot BC)$, rămîne $BD = BC$, adică o parte din segmentul BC este egală cu întregul segment.

Cum se explică acest rezultat?

11. Suprafața unui trapez este egală cu zero.

Considerăm trapezul $ABCD$ (fig. 17) cu baza mare a și baza mică b . Prelungim baza mică pînă în punctul N , astfel ca $BN = a$, iar baza mare pînă în M , astfel ca $DM = b$.

Ducem diagonalele AC și BD ale trapezului care se taie în O și unim apoi M cu N .

Dreapta MN taie diagonala BD în E . Însemnăm segmentele BO , OE și ED determinate pe diagonala BD , respectiv cu x , y , z .

Triunghiurile AOB și COB sînt asemenea, deoarece au unghiurile din O egale ca opuse la vîrf, iar unghiul BAO egal cu unghiul DCO (alterne interne).

Din această asemănare rezultă proporționalitatea laturilor: $\frac{x}{y+z} = \frac{b}{a}$; de asemenea din triunghiurile EMD și EBN putem scrie: $\frac{z}{x+y} = \frac{b}{a}$

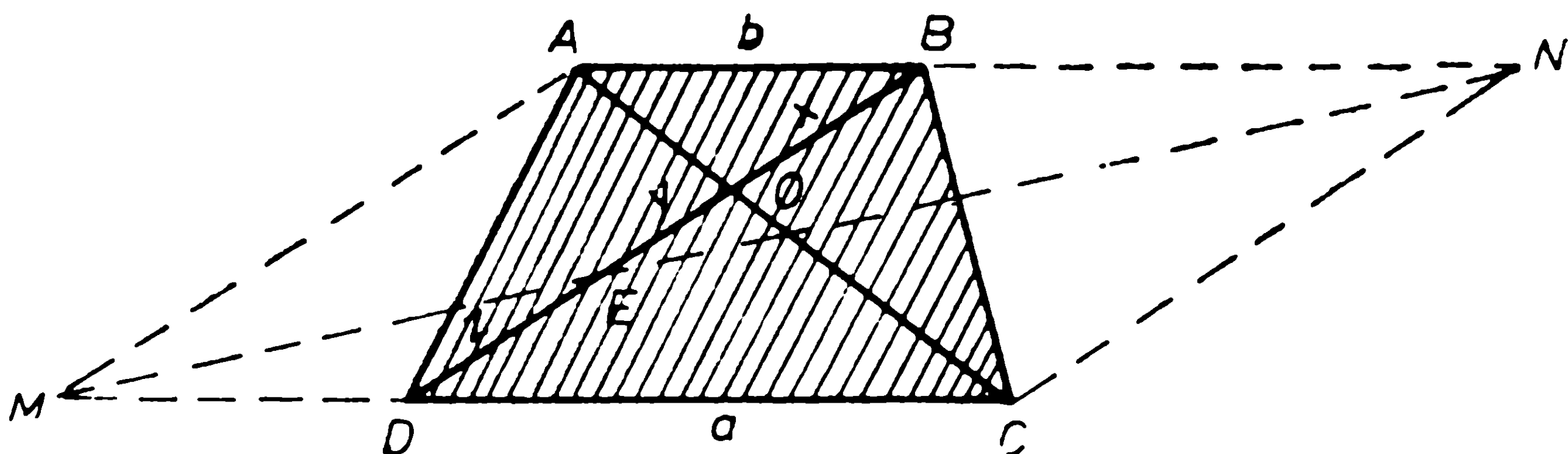


Fig. 17.

Comparînd cele două proporții, rezultă:

$$\frac{x}{y+z} = \frac{z}{x+y} \text{ de unde } \frac{x-z}{y+z-(x+y)} = \frac{x}{y+z} = \frac{b}{a}; \quad \frac{x-z}{z-x} = \frac{b}{a}$$

$$\text{Dar } \frac{x-z}{z-x} = -1; \text{ deci } \frac{b}{a} = -1 \text{ sau } a = -b$$

(adică bazele unui trapez sînt egale și de semn contrar).

$$\text{Rezultă } S = \frac{a+b}{2} \cdot h = 0 \cdot h = 0$$

Cum s-a ajuns la acest rezultat absurd?

Notă: O problemă asemănătoare a fost dată la concursul de matematică din Torino (Italia) în anul 1966; vezi G.M., XII-1967.

12. Razele a două cercuri concentrice sînt egale.

Luăm două cercuri concentrice, cu centrul în O , cu razele r și R , legate rigid între ele (fig. 18).

Ducem tangentele paralele t și T la cele două cercuri.

Imprimăm cercului mic o mișcare de rostogolire pe tangenta sa în sensul arătat de săgeată.

Atunci cînd cercul mic se rotește de un sfert de cerc (90°), dat fiind legătura rigidă dintre ele, cercul cel mare se rotește și el tot de un sfert de cerc în același sens.

În momentul pornirii, ambele cercuri vor avea punctele lor de contact A și B cu tangentele lor, așezate în linie dreaptă cu centrul comun O . Punctele A_1 și B_1 , situate la un sfert de cerc față de A și B , vor fi tot în linie dreaptă cu centrul comun O . După o rotire de 90° , centrul comun O va veni în O_2 , iar punctele A_1 și B_1 vor veni respectiv în A_2 și B_2 și, bineînțeles, tot în linie dreaptă cu noua poziție O_2 a centrului comun.

Cum dreapta $O_2A_2B_2$ este noua poziție a razelor duse la punctul de contact cu tangentele t și T , urmează că A_2B_2 este paralel cu AB și deci figura ABB_2A_2 este un dreptunghi; în consecință:

$$AA_2 = BB_2$$

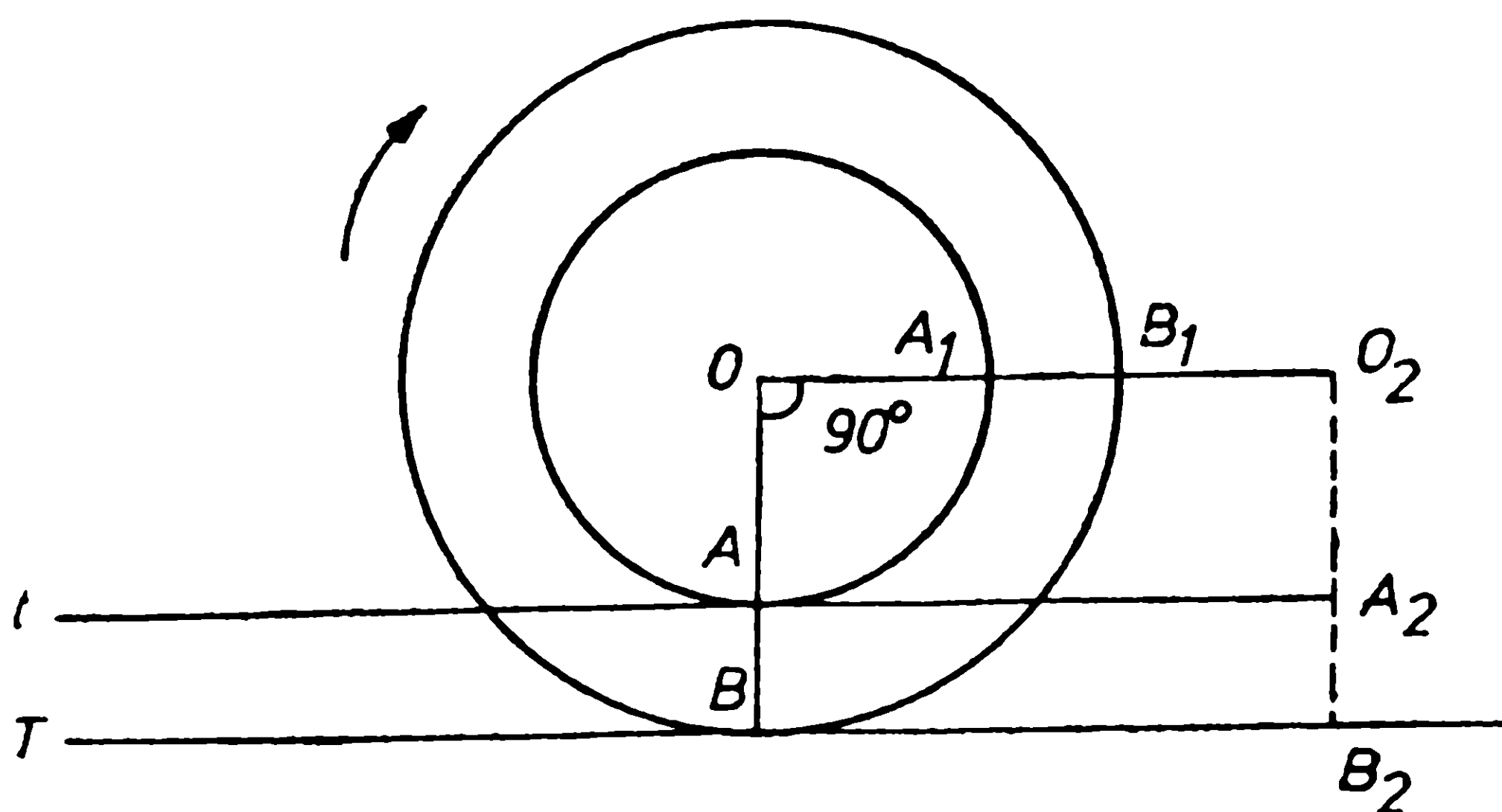


Fig. 18.

$$\text{Pe de altă parte } AA_2 = \frac{2\pi r}{4} = \frac{\pi r}{2} \text{ iar}$$

$$BB_2 = \frac{2\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2},$$

de unde $\frac{\pi r}{2} = \frac{\pi R}{2}$ sau $r = R$, adică cercurile au raze egale.

Acest paradox este cunoscut sub numele de *paradoxul lui Aristotel*, dar nu se știe dacă acesta a dat și demonstrația din care să rezulte de unde provine absurditatea acestor concluzii.

Galileo Galilei este considerat ca primul matematician care a explicat de unde rezultă absurditatea concluziilor de mai sus. El a arătat că atunci când cercul mic se rostogolește, și cercul mare are o mișcare de rostogolire, dar, totodată, el alunecă în sens invers, astfel că lungimea BB_2 nu reprezintă adevăratul drum parcurs de ultimul cerc.

Drumul cercului mare se compune din BB_2 parcurs prin rostogolire, dar și din o mulțime foarte mare de alunecări mici pe tangentă în sensul invers mișcării.

13. *Diametrul unui cerc este egal cu circumferința lui.*

Fie cercul din fig. 19 al cărui diametru este egal cu D . Circumferința lui va fi egală cu πD .

Pe razele OA și OB , ca diametri, construim alte două cercuri ale căror circumferințe vor fi $\pi \frac{D}{2}$, iar suma lor $2\pi \cdot \frac{D}{2} = \pi D$, adică egală cu lungimea cercului dat.

Descriind acum patru cercuri pe razele celor două cercuri construite anterior, diametrii acestor noi cercuri vor fi $\frac{D}{4}$, iar suma celor patru circumferințe va fi $4\pi \cdot \frac{D}{4} = \pi D$, adică tot lungimea cercului dat.

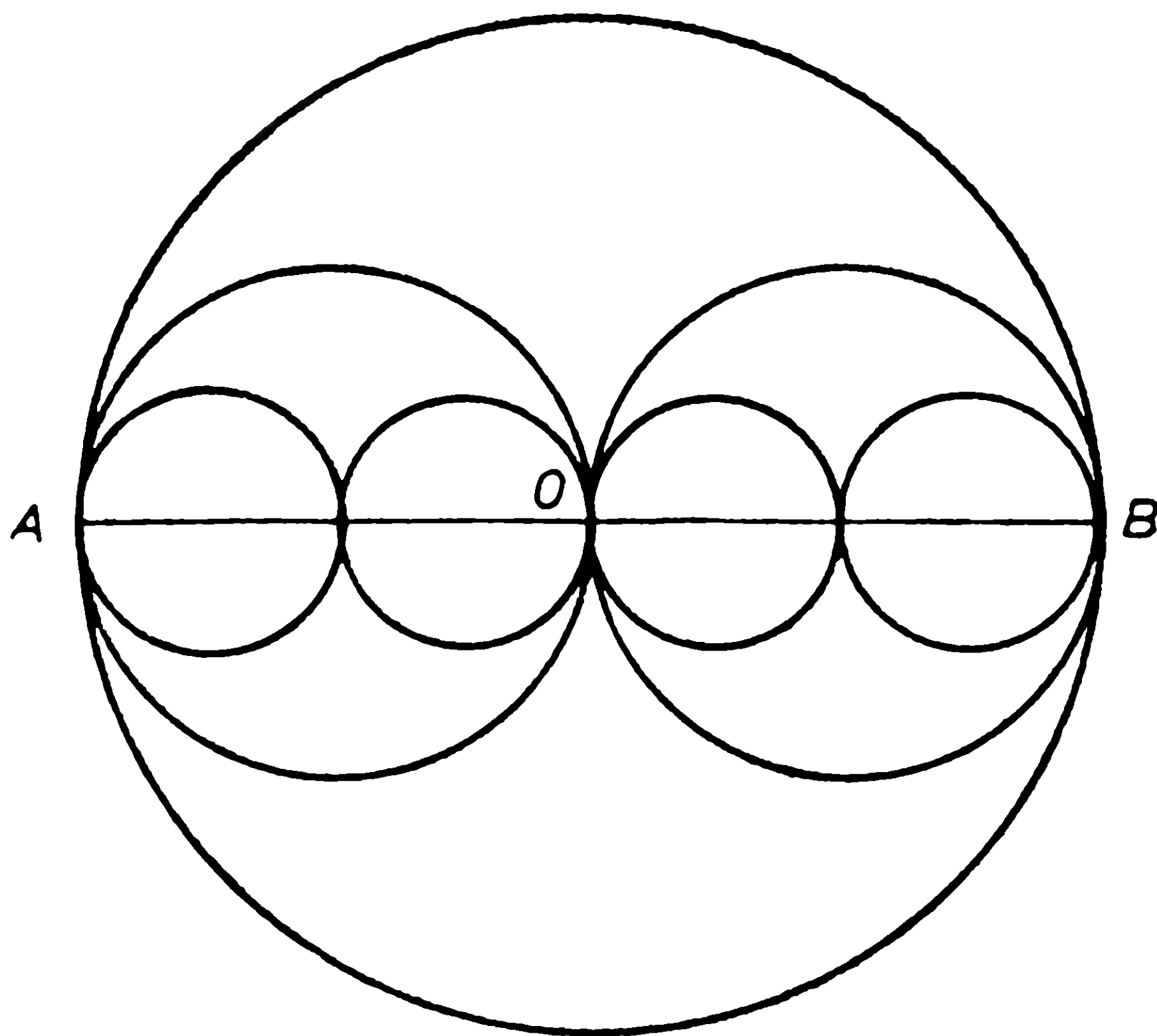


Fig. 19.

Deci, în ori câte părți am divide diametrul cercului dat, suma circumferințelor construite pe toate fracțiunile de diametru este egală cu circumferința cercului dat.

Aceste circumferințe, care devin din ce în ce mai mici, se vor reduce la limită la un șir de puncte, care vor coincide cu diametrul AB .

În concluzie, rezultă că circumferința unui cerc este egală cu diametrul său.

Cum se explică această concluzie falsă?

14. Un amator de distracții matematice, făcînd diferite transformări ale expresiilor algebrice, a ajuns la concluzia ciudată că greutatea unui elefant este egală cu greutatea unui țînțar. El a raționat în felul următor:

Fie x greutatea elefantului și y , greutatea țînțarului. Notăm cu $2v$ suma acestor greutăți: $x + y = 2v$.

Din această egalitate putem obține alte două:

$$x - 2v = -y; \quad x = -y + 2v$$

Să înmulțim aceste două egalități termen cu termen:

$$x^2 - 2vx = y^2 - 2vy$$

Adunînd la ambii membri ai acestei egalități v^2 , vom obține:

$$x^2 - 2vx + v^2 = y^2 - 2vy + v^2 \text{ sau } (x - v)^2 = (y - v)^2$$

Extrăgînd rădăcina pătrată din ambii membri ai ultimei egalități vom obține:

$$x - v = y - v \text{ sau } x = y.$$

Prin urmare, greutatea elefantului (x) este egală cu greutatea țînțarului (y).

Unde s-a greșit în acest șir de raționamente?

R. Nu s-a ținut seama că extrăgînd rădăcina pătrată din ambii membri ai egalității: $(x - v)^2 = (y - v)^2$, sînt posibile două rezultate: $x - v = y - v$ sau $x - v = v - y$.

În primul caz, $x - v > 0$, iar $y - v < 0$, prin urmare egalitatea $x - v = y - v$ nu convine (un număr pozitiv nu poate fi egal cu unul negativ).

A doua egalitate este echivalentă cu egalitatea de la care s-a plecat. Dacă s-ar fi luat această egalitate, s-ar fi evitat greșelile, dar nu s-ar fi obținut un rezultat nou.

b. Paradoxuri logico-matematice

1. Paradoxul mincinosului.

Se pare că faimosul paradox al mincinosului a fost enunțat pentru prima oară de Eubulide, aparținînd școlii din Megara. În formularea lui inițială, se punea unui mincinos o simplă întrebare:

— Minți cînd spui că minți? — la care mincinosul nu avea decît două răspunsuri (*tertium non datur*): 1) „mint”; 2) „nu mint”.

Dacă cel care spune că minte, minte, înseamnă că nu e adevărat că minte, deci el nu minte; dacă cel care spune că minte, nu minte, înseamnă că e adevărat că minte, deci el minte.

În consecință, propoziția „mint” nu poate fi declarată nici adevărată, nici falsă, pentru că ea ia imediat valoare contrarie.

Asupra acestui sofism s-au scris multe cărți. Istoria consemnează faptul curios al morții lui Philetas, provocată de eforturile zadarnice făcute pentru rezolvarea acestui paradox.

Paradoxul mincinosului apare în diverse variante. Iată două dintre acestea:

1. *«Într-o insulă trăia o rasă de uriași foarte șireți și cruzi. Fiindcă erau cruzi, ei omorau pe orice străin care acosta pe insulă; fiindcă erau șireți, hotărîseră să-l pună să-și dea singur sentința de moarte. Îi puneau o întrebare și dacă răspunsul era adevărat, îl jertfeau idolului adevărului; dacă răspunsul era fals, îl jertfeau idolului minciunii.*

Însă s-a întîmplat ca odată, uriașii să-i pună unui străin mai șiret decît ei întrebarea: „Care îți va fi moartea?”

Străinul a răspuns: „O să mă jertfiți idolului minciunii“.

Puși în încurcătură, uriașii au început să discute. Dacă acest om a spus adevărul, trebuie să fie jertfit idolului adevărului, dar în acest caz, afirmația sa este o minciună; dacă acest om a spus o minciună, trebuie jertfit idolului minciunii, dar atunci a spus adevărul».

Propoziția străinului nu poate fi declarată nici adevărată nici falsă, pentru că, în orice caz, ea duce la o contradicție.

2. Un filozof este condamnat la moarte de către un calif. Acesta face o excepție de la regulă și acordă filozofului privilegiul de a-și alege el însuși felul execuției.

„Dacă îmi vei spune un adevăr, spune califul, vei fi ucis cu sabia; dacă vei spune o minciună, vei fi ucis prin ștreang“.

Se lasă filozofului cîtva timp de meditație, după care el spune califului propoziția următoare:

„Voi fi ucis prin ștreang“.

Iată acum gravitatea problemei: dacă această propoziție este adevărată, atunci filozoful trebuie să fie ucis cu sabia și deci propoziția e falsă; dacă această propoziție este falsă filozoful trebuie ucis prin ștreang, dar atunci ea e adevărată.

În ce constă cercul vicios care face problema insolubilă?

Condițiile puse de calif sînt: filozoful va spune o propoziție care, prin adevărul sau falsitatea sa, va determina modul execuției sale.

Filozoful enunță o propoziție al cărei adevăr sau falsitate depinde de modul execuției sale.

Condițiile au fost schimbate. Califul spune:

1. Modalitatea execuției tale depinde de adevărul sau falsitatea propoziției ce o vei spune.

Filozoful ripostează prin propoziția sa:

2. Adevărul sau falsitatea propoziției mele depinde de modalitatea execuției mele.

Cu alte cuvinte, califul stabilise un antecedent logic care determină consecințele sale, în timp ce filozoful schimbă problema, prin enunțul însuși al răspunsului său, luînd ca antecedent tocmai ceea ce enunțul problemei declarase drept consecvent. Criteriile 1) și 2) sînt confundate într-unul singur, dar ele funcționează simultan, de unde cercul vicios.

2. Pseudoparadoxul bărbierului.

„Bărbierul satului este definit ca acela care rade pe toți cei care nu se rad singuri. Cine rade pe bărbierul satului?”

Dacă trebuie să se radă singur, atunci nu poate să se radă pentru că el nu rade decât pe cei care nu se rad singuri; dacă nu se rade singur, atunci conform definiției, trebuie să se radă singur.

(Din Soluția paradoxelor logico-matematice de Anton Dumitriu.)

6. Un concurs antrenant

Probleme date la al 14-lea concurs anual de matematică,
S.U.A. — 1963

La fiecare chestiune sînt date cîteva răspunsuri, dintre care trebuie ales cel corect. Pentru răspunsurile greșite se scade 25% din punctajul afectat. Durata de lucru 80 minute pentru 40 probleme.

Partea întâia. (3 puncte fiecare problemă)

1. Care punct din cele ce urmează *nu* se află pe graficul funcției $y = \frac{x}{x+1}$?

(A) $(0, 0)$; (B) $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$; (C) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$; (D) $(1, -1)$; (E) $(-2, 2)$.

2. Fie $n = (x-y)^{x-y}$. Să se afle n , cînd $x=2$ și $y=-2$.

(A) -14 ; (B) 0 ; (C) 1 ; (D) 18 ; (E) 256 .

3. Pentru ce valoare (sau valori) ale lui k perechea de ecuații $y=x^2$ și $y=3x+k$ are două soluții identice?

(A) $\frac{4}{9}$; (B) $-\frac{4}{9}$; (C) $\frac{9}{4}$; (D) $-\frac{9}{4}$; (E) $\frac{9}{4}$ sau $-\frac{9}{4}$.

4. Dacă inversul lui $x+1$ este $x-1$, atunci x are valoarea:

(A) 0 ; (B) 1 ; (C) -1 ; (D) $+1$ sau -1 ; (E) nici una dintre acestea.

5. Dacă x și $\log_{11} 2$ sînt numere reale și $\log_{22} 2 < 0$, atunci

(A) $x < 0$; (B) $-1 < x < 1$; (C) $0 < x \leq 1$; (D) $-1 < x < 0$; (E) $0 < x < 1$.

6. Triunghiul ABD este dreptunghic în B. Pe AD există un punct C pentru care $AC=CD$ și $AB=BC$. Mărima unghiului DAB, în grade este:

(A) $67, 12$; (B) 60 ; (C) 45 ; (D) 30 ; (E) $22\frac{1}{2}$.

7. Sînt date patru ecuații: (1) $3y - 2x = 12$; (2) $-2x - 3y = 10$; (3) $3y - 2x = 12$; (4) $2y + 3x = 10$. Perechea reprezentînd drepte perpendiculare este:

(A)(1) și (4); (B)(1) și (3); (C)(1) și (2); (D)(2) și (4); (E)(2) și (3).

8. Cel mai mic întreg pozitiv x , pentru care $1260x = N^3$, unde N este un întreg, este:

(A) 1 050; (B) 1 200; (C) $1\,260^2$; (D) 7 350; (E) 44 100.

9. În dezvoltarea binomului $\left(a - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^7$, coeficientul lui $a^{-\frac{1}{2}}$ este:

(A) -7 ; (B) 7 ; (C) -13 ; (D) 21 ; (E) 35 .

10. Punctul P este luat în interiorul unui pătrat de latură a , astfel că este egal depărtat de două vîrfuri consecutive și de latura opusă acestor două vîrfuri. Dacă d reprezintă distanța comună, atunci d are valoarea:

(A) $\frac{3a}{5}$; (B) $\frac{5a}{8}$; (C) $\frac{3a}{8}$; (D) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$; (E) $\frac{a}{2}$.

11. Media aritmetică a 50 de numere este 38. Dacă două numere dintre acestea, anume 45 și 55, sînt înlăturate, media aritmetică a numerelor rămase este:

(A) 38,5; (B) 37,5; (C) 37; (D) 36,5; (E) 36.

12. Trei vîrfuri ale paralelogramului PQRS sînt $P(-3, -2)$; $Q(1, -5)$; $R(9, 1)$, cu P și R diagonal opuse. Suma coordonatelor vîrfului S este: (A) 13; (B) 12; (C) 11; (D) 10; (E) 9.

13. Dacă $2^a + 2^b = 3c + 3d$, numărul întregilor a, b, c, d care pot fi negativi este: (A) 4; (B) 3; (C) 2; (D) 1; (E) 0.

14. Se dau ecuațiile $x^2 + kx + 6 = 0$ și $x^2 - kx + 6 = 0$. Dacă atunci cînd rădăcinile ecuațiilor sînt convenabil scrise, fiecare rădăcină a primei ecuații este cu 5 mai mică decît rădăcina corespunzătoare a celei de-a doua ecuații, atunci k are valoarea: (A) 5; (B) -5 ; (C) 7; (D) -7 ; (E) nici una dintre aceste valori.

15. Într-un triunghi echilateral este înscris un cerc, iar în cerc este înscris un pătrat. Raportul dintre aria triunghiului și aria pătratului este:

(A) $\sqrt{3} : 1$; (B) $\sqrt{3} : \sqrt{2}$; (C) $3\sqrt{3} : 2$; (D) $3 : \sqrt{2}$; (E) $3 : 2\sqrt{2}$.

16. Trei numere a, b, c , nenule, formează o progresie aritmetică. Mărind pe a cu 1 sau mărind pe c cu 2 rezultă o progresie geometrică. Atunci b are valoarea:

(A) 16; (B) 14; (C) 12; (D) 10; (E) 8.

17. Expresia

$$\frac{\frac{a}{a+y} + \frac{v}{a-y}}{\frac{y}{a-y} - \frac{a}{a-y}}$$

a real, a diferit de 0, are valoarea -1 pentru:

- (A) toate valorile reale ale lui y , exceptând două;
- (B) toate valorile reale ale lui y ;
- (C) nici o valoare reală a lui y ;
- (D) numai două valori reale ale lui y ;
- (E) numai o singură valoare reală a lui y .

18. Într-un cerc coarda EF este mediatoarea corzii BC , intersectînd-o pe aceasta în M . Între B și M se ia punctul U , iar prelungirea lui EU taie cercul în A . Atunci, pentru orice alegere a lui U , triunghiul EUM este asemenea cu triunghiul:

- (A) EFA ; (B) EFC ; (C) ABM ; (D) ABU ; (E) FMC .

19. Numărînd n bile colorate, roșii și negre, s-a observat că 49 din primele 50 numărate erau roșii. Apoi, din fiecare 8 bile, 7 erau roșii. Dacă, în total, 90% sau mai mult din bile erau roșii, valoarea maximă a lui n este:

- (A) 225; (B) 210; (C) 200; (D) 180; (E) 175.

20. Doi oameni, în punctele R și S , la distanța de 76 mile, pornesc simultan unul către altul. Omul din R merge uniform cu 4,5 mile pe oră; omul din S merge cu viteza constantă de 3,25 mile pe oră în prima oră, cu 3,75 mile pe oră în ora a doua ș.a.m.d. în progresie aritmetică.

Oamenii se întîlnesc cu x mile mai aproape de R decît de S , unde x este:

(A) 10; (B) 8; (C) 6; (D) 4; (E) 2;.

Partea a doua (4 puncte pentru fiecare problemă).

21. Expresia $x^2 - y^2 - z^2 + 2yz + x + y - z$ are:

- (A) nici un factor linear cu exponenți și coeficienți întregi; (B) factorul $-x + y + z$; (C) factorul $x - y - z + 1$; (D) factorul $x + y - z + 1$; (E) factorul $x - y + z + 1$.

22. Triunghiul ascuțitunghic ABC este înscris într-un cerc cu centrul O și $\widehat{AB} = 120^\circ$ și $\widehat{BC} = 72^\circ$. Un punct E este luat pe arcul mic AC , astfel că OE este perpendicular pe AC . Atunci raportul valorilor unghiurilor OBE și BAC este:

- (A) $\frac{5}{18}$; (B) $\frac{2}{9}$; (C) $\frac{1}{4}$; (D) $\frac{1}{3}$; (E) $\frac{4}{9}$.

23. A dă lui B tot atîția cenți cîți are B și lui C tot atîția cenți cîți are C . Analog, B dă lui A și C tot atîția cenți cîți are fiecare dintre ei. Dacă, în final, fiecare are 16 cenți, cu cîți cenți a pornit A ?

- (A) 24; (B) 26; (C) 28; (D) 30; (E) 32.

24. Se consideră ecuațiile de forma $x^2 + bx + c = 0$. Cîte asemenea ecuații au rădăcini reale și au coeficienții b și c aparținînd mulțimii $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

- (A) 20; (B) 19; (C) 18; (D) 17; (E) 16.

25. Punctul F este luat pe latura AD a pătratului $ABCD$. O perpendiculară în C pe CF întîlnește prelungirea laturii AB în E . Aria lui $ABCD$ este de 256, iar aria triunghiului CEF este 200. Atunci BE are valoarea:

- (A) 12; (B) 14; (C) 15; (D) 16; (E) 20.

26. Se consideră afirmațiile: (1) p și r sînt adevărate iar q este fals; (2) r este adevărat și p și q sînt false; (3) q și r sînt false iar p este adevărat; (4) q și r sînt adevărate iar p este fals. Cîte dintre acestea implică adevărul afirmației: „ r este implicat de afirmația că p implică pe q ”?

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3; (E) 4.

27. Șase linii drepte sînt duse într-un plan, astfel oricare două nu sînt paralele și nici oricare trei concurente. Numărul regiunilor în care aceste drepte împart planul este:

(A)16; (B)20; (C)22; (D)24; (E)26.

28. Se dă ecuația $3x^2 - 4x + k$ cu rădăcinile reale.

Valoarea lui k pentru care produsul rădăcinilor ecuației este maxim, va fi: (A) $\frac{16}{9}$; (B) $\frac{16}{3}$; (C) $\frac{4}{9}$; (D) $\frac{4}{3}$; (E) $\frac{-4}{3}$.

29. O particulă proiectată pe verticală atinge, după t secunde, o înălțime de S metri, unde $S = 160t - 16t^2$. Înălțimea maximă este (A)800; (B)640; (C)400; (D)320; (E)160.

30. Fie $F = \log \frac{1+x}{1-x}$. Se înlocuiește x în F prin $\frac{3x+x^3}{1+3x^2}$ și se simplifică. Expresia simplificată este egală cu:

(A) $-F$; (B) F ; (C) $3F$; (D) F^3 ; (E) $F^3 - F$.

Partea a treia (5 puncte fiecare problemă).

31. Numărul soluțiilor în întregi pozitivi ale ecuației $2x + 3y = 763$ este: (A)255; (B)254; (C)128; (D)127; (E)0.

32. Dimensiunile unui triunghi dreptunghic R sînt a și b , $a < b$. Se cere să se obțină un triunghi dreptunghic cu dimensiunile (catetelor) x și y , $x < a$, $y < a$, astfel încît perimetrul să fie o treime din acela al lui R și aria o treime din aceea a lui R . Numărul unor asemenea triunghiuri dreptunghice (diferite) este: (A)0; (B)1; (C)2; (D)4; (E) o infinitate.

33. Se dă dreapta $y = \frac{3}{4}x + 6$ și o dreaptă L paralelă cu cea dată și situată la 4 unități de aceasta. O ecuație posibilă a dreptei L este:

(A) $y = \frac{3}{4}x + 1$; (B) $y = \frac{3}{4}x$; (C) $y = \frac{3}{4}x - \frac{2}{3}$; (D) $y = \frac{3}{4}x - 1$; (E) $y = \frac{3}{4}x + 2$.

34. În triunghiul ABC , latura $a = \sqrt{3}$, latura $b = \sqrt{3}$ și latura $c = 3$. Fie x cel mai mare număr astfel ca valoarea, în grade, a unghiului opus laturii c să fie mai mare decît x . Atunci x are valoarea: (A)150; (B)120; (C)105; (D)90; (E)60.

35. Laturile unui triunghi sînt întregi, iar aria sa este de asemenea un întreg. O latură este 21 iar perimetrul 48. Cea mai mică latură este: (A) 8; (B)10; (C)12; (D)14; (E)16.

36. O persoană are la început 64 de cenți și face 6 pariuri, cîștigînd de 3 ori și pierzînd de 3 ori, cîștigurile și pierderile avînd loc în ordine întîmplătoare. Șansa pentru cîștig este egală cu șansa pentru pierdere. Dacă fiecare pariu

se face pentru jumătate din banii care rămân pentru pariul respectiv, atunci rezultatul final este:

- (A) o pierdere de 27 cenți;
- (B) un câștig de 27 cenți;
- (C) o pierdere de 37 cenți;
- (D) nici un câștig și nici o pierdere;
- (E) un câștig sau o pierdere, depinzând de ordinea în care câștigurile și pierderile au loc.

37. Se dau șapte puncte $P_1P_2 \dots P_7$ pe o distanță, într-o ordine stabilită (nu neapărat la intervale egale unul de altul). Fie P un punct arbitrar ales pe dreaptă și fie S suma lungimilor $PP_1, PP_2, PP_3 \dots PP_7$. Suma S este minimă dacă și numai dacă punctul P este:

- (A) mijlocul distanței dintre P_1 și P_7 ; (B) mijlocul distanței între P_2 și P_6 ;
- (C) mijlocul distanței între P_3 și P_5 ; (D) în P_4 ; (E) în P_1 .

38. Punctul F este luat pe prelungirea laturii AD a paralelogramului $ABCD$. BF intersectează diagonala AC în E și latura DC în G . Dacă $EF=32$ și $CF=24$, atunci BE are valoarea:

- (A)4; (B)8; (C)10; (D)12; (E)16.

39. În triunghiul ABC se duc dreptele CE și AD astfel ca $CD/DB=3/1$ și $AE/EB=3/2$. Fie $r=CP/PE$, unde P este intersecția lui CE cu AD . Atunci r are valoarea:

- (A) 3; (B) $\frac{3}{2}$; (C) 4; (D) 5; (E) $\frac{5}{2}$.

40. Dacă x este un număr satisfăcând ecuația:

$\sqrt[3]{3x+9}-\sqrt[3]{x-9}=3$, atunci x^2 este cuprins între:

- (A)55 și 65;(B) 65 și 75; (C)75 și 85; (D)85 și 95 (E)95; și 105.

(G.M.B., nr. 2/1967)

7. Probleme recreative

În această categorie sînt incluse probleme, care atrag, în special, prin modul de redactare, prin interesul pe care-l stîrnesc și prin căile expeditivă și ingenioase de rezolvare.

După acest specific, ele capătă variate titluri, în care se pune accentul pe o anumită caracteristică. În operele consacrate acestui gen, întîlnim la diferiți autori, denumiri ca: probleme de istețime, enigme matematice, șarade și farse matematice, truc matematic, duel aritmetic, problemă-glumă, -fulger, -ghicitoare, -juridică, rebus cu numere, scamatorie geometrică, probleme distractive (care nu necesită calcule deosebite și se pot rezolva ușor în diferite împrejurări, în societate), probleme atractive etc.

Sport al spiritului, ele ascut facultatea de cercetare, de combinare și provoacă o activitate cerebrală agreabilă.

1. *Problemă de agerime.*

Trei filozofi din Grecia antică s-au culcat sub un copac din grădina Academiei și au adormit.

În timp ce dormeau, un glumeț îi mînji pe frunte cu cărbune. Cînd s-au trezit și s-au privit, toți trei s-au veselit și au început să rîdă cu poftă. Nici unul nu era neliniștit, căci fiecăruia i se părea firesc ca el, împreună cu alt înțelept, să rîdă de al treilea.

La un moment dat, unul din ei a încetat să rîdă, căci și-a dat seama că și el este murdar pe frunte. Cum a raționat el?

* * *

2. Un melc trebuie să urce o stîncă înaltă de 14 metri. Ziua urcă 6 m, iar noaptea alunecă în jos 4 m.

În cîte zile va ajunge deasupra?

* * *

3. Un cioban se duce la tîrg cu mai multe oi spre a le vinde. El vinde succesiv: a treia parte din oi, patru oi, jumătate din ce i-a rămas, o oaie, a treia parte din ce i-a mai rămas, cinci oi, și se întoarce acasă cu 9 oi.

Cu cîte oi venise la tîrg?

* * *

4. La o serbare vin 20 de tineri, băieți și fete. Unul din băieți a dansat cu 5 fete. Un al doilea a dansat cu 6 fete, un al treilea cu 7 și așa mai departe. Ultimul din ei a dansat cu toate fetele. Câți băieți și câte fete au luat parte la serbare?

• • •

5. Dacă 3 pisici omoară 3 șobolani în 3 minute, cât timp le-ar trebui la 100 de pisici ca să omoare 100 de șobolani?

• • •

6. La o cramă erau 3 vase: unul de 3 l, altul de 5 l și un vas mai mare. Cum s-a reușit să se măsoare 4 l de vin cu ajutorul acestor vase?

• • •

7. Pentru o carte s-a plătit 1 leu, plus încă o jumătate din costul ei. Cât costă cartea?

• • •

8. Două femei pe nume M. și E. se duc la târg să vîndă ouă. Într-o primă zi fiecare desface câte 30 de ouă și anume: M. le dă cu prețul de 2 ouă la 1 leu, iar E. cu 3 ouă la 1 leu. A doua zi, avînd spre vînzare, iarăși, fiecare din ele câte 30 de ouă se învoiesc să le pună laolaltă și să ceară un același preț, anume 5 ouă la 2 lei.

Făcîndu-și socoteala, femeile descoperă, apoi, că pe cînd în ziua întîi au adunat împreună 25 de lei, în ziua a doua n-au obținut decît 24 de lei, cu toate că au vîndut de fiecare dată tot 60 de ouă și deși nu s-au gîndit să ieftinească marfa.

Cum se explică această contradicție.

• • •

9. Un călător se află la o răscruce și nu știe încotro să se îndrepte, la stînga sau la dreapta, pentru a ajunge într-o anumită localitate.

Din casa de la răscruce iese un om. Călătorul știe că în această casă locuiesc doi frați, dintre care unul spune numai lucruri adevărate, iar celălalt numai lucruri false. Poate oare călătorul să pună omului o singură întrebare așa încît să afle în ce direcție să pornească?

Se va justifica răspunsul.

• • • ,

10. În fața unui tribunal din Evul Mediu se afla un acuzat. Judecătorul i-a spus: trebuie să dai o declarație. Dacă ea va fi adevărată, vei fi condamnat la moarte, iar dacă va fi neadevărată, vei fi de asemenea condamnat la moarte. Poate oare acuzatul să se salveze? Se va justifica răspunsul.

(G.M., 5-1968)

11. Pe un cîmp, mai multe regimente de cavalerie își aranjează caii în 11 grupuri, fiecare grup avînd 15 rînduri de câte 12 cai.

Fiecare soldat cavalerist primește în grijă 6 cai. Alături de aceștia sînt cîteva grupuri de infanteriști; în fiecare grup sînt 22 rînduri de câte 15 soldați.

Cîte grupuri de infanterişti sînt, dacă numărul picioarelor infanteriştilor este egal cu numărul picioarelor cavaleriştilor  i cailor la un loc?

• • •

12. Verde  mp rat  i Ro u  mp rat se aflau în cr ncen război. Pasă-mi-te fiul lui Verde  mp rat o iubea pe fata lui Ro u  mp rat, ceea ce l-a m niat pe tatăl fetei. Într-o aprigă bătălie, fiul lui Verde  mp rat căzu prizonier cu alți trei o teni. Atunci Ro u  mp rat  i a az  la o m su   de patru locuri  i le zise:

—  nc  10 bile: 3 albe, 3 ro ii  i 4 negre.

Lua i fiecare pe ascuns c te una; dar mai  nt i să te leg pe tine la ochi, zise el prin ului.

Zis  i făcut. Fiecare avea c te o bilă, ba chiar putea să vadă  i bilele celor doi al tura i, însă nu  i pe aceea din fa  . Numai fiul lui Verde  mp rat nimica nu vedea.

Acum, continuă Ro u  mp rat, să-mi spune i fiecare ce fel de bilă are cel din fa   voastră. Pute i spune fie că nu  ti i, fie o culoare, fie două. Dacă nu  ti i, r m ne i aici prizonieri; dacă spune i două culori  i una din ele e cea adevărată, vă dau libertate. Aceluia, care spune una singură  i aceea e cea adevărată, i-o dau pe fiica mea de so ie. Dar dacă culoarea adevărată nu e aceea sau una din acele spuse de voi, atunci ve i fi sp nzura i.

Spune tu, se adresă împăratul unuia dintre o teni!

— Nu  tiu . . .

— Dar voi?  i ar t  spre ceilal i.

— Nici eu nu  tiu, zise al doilea.

— Nici eu, făcu al treilea.

— Acum pe tine vreau să te aud, prințule.

— Negru.

Să se demonstreze că Ro u  mp rat i-a dat-o de so ie pe fiica sa fiului lui Verde  mp rat, știind că acești  mp ra i  i  ineau cuv ntul.

T. Zamfirescu (G.M.B., 1968)

13. Andrei o întrebă pe Mariana căi ani are.

— Ghice te!  i răspunse ea.

— Bine, dar spune-mi numai c t va rămîne dacă, dintr-un număr de 10 ori mai mare dec t anii tăi, vom scădea produsul cu 9 al unui număr cu o singură cifră! o rugă Andrei.

Mariana se conformează  i-i comunică: 143.

Andrei separă cifra unităților numărului comunicat (3), o adună cu numărul rămas (14)  i stabilește v rsta: $14 + 3 = 17$ ani.

Trucul a avut un mare efect.

Dar care este baza lui matematică?

• • •

14. Un tată se g nde te să depună la C.E.C. pe numele celor trei b ie i ai săi o sumă de bani în raportul $7 : 6 : 5$, corespunzător v rstei lor.  n urmă  i schimbă părerea  i depune pentru fiecare câte o sumă în raport cu notele luate la teza de matematică, $6 : 5 : 4$.

În modul acesta, unul din ei ia mai mult cu 12 lei.

Ce sumă a depus la C.E.C. și cît s-a înscris pe carnetul fiecărui băiat?

• • •

15. Un rege, vrînd să scape de primul său ministru, puse două hîrtii într-o pălărie. El preveni pe judecătorul care asista la tragerea sortilor, că dacă primul ministru va scoate hîrtia pe care era scris „rămîi“, i se va îngădui să nu părăsească regatul, iar dacă va scoate hîrtia pe care era scris „pleacă“, va trebui să plece. Ca să fie sigur că va scăpa de dregătorul său, regele scrisese pe amîndouă hîrțile „pleacă“.

Dar primul ministru, care era destul de isteț, arătă judecătorului una din hîrtii și judecătorul decise în favoarea lui.

Cum a zădărnicit primul ministru planul regelui?

• • •

16. *O plimbare pe jos.*

— Poftiți mîine pe la mine! zise bătrînul doctor unui prieten al său.

— Vă mulțumesc. Voi pleca de acasă la ora 3. Dacă și dvs. intenționați să faceți o plimbare, ieșiți din casă la aceeași oră și ne vom întîlni la jumătatea drumului.

— Dv. uitați că eu sînt om bătrîn și nu pot face mai mult de 3 km pe oră, în timp ce dv. puteți parcurge ușor 4 km. Cred că ar fi cazul să mă avantajați puțin.

— Aveți dreptate. Dat fiind că eu fac cu 1 km pe oră mai mult decît dv., pentru a nivela condițiile, vă dau acest kilometru, adică voi ieși din casă cu un sfert de oră mai devreme. Vă este suficient?

— E foarte amabil din partea dv.! se grăbi să-i răspundă bătrînul.

Plimbarea a decurs conform înțelegerii; după ce s-au întîlnit, bătrînul și tînărul s-au îndreptat împreună spre locuința doctorului. Întorcîndu-se acasă tînărul și-a dat seama că, acordînd doctorului sfertul de oră respectiv, el a parcurs în total o distanță nu de două ori, ci de patru ori mai mare decît doctorul.

La ce distanță de casa doctorului se afla locuința tînărului?

• • •

17. Șapte jucători s-au învoit ca cel care va pierde partida să plătească celorlalți o sumă de bani echivalentă cu cea pe care o posedă persoana respectivă, cu alte cuvinte să dubleze banii fiecărui partener.

Au jucat 7 partide. Fiecare a pierdut cîte una. După terminarea jocului, au socotit cîți bani are fiecare. S-a aflat, spre mirarea tuturor, că toți au aceeași sumă: 12,80 lei.

Cîți bani poseda fiecare jucător la începutul jocului?

• • •

18. Un jucător pierde, la primul joc, jumătate din suma ce avea plus 1 leu; la al doilea, jumătate din ce i-a rămas plus 2 lei; iar la al treilea joc, pierde jumătate din ce-i mai rămăsese plus 3 lei și termină banii.

Cîți bani a avut la începutul jocului?

(R.M.T.)

19. Doctorul Watson și musafirul său Holmes stau la o fereastră deschisă. Din grădină ajung la urechile lor glasurile vesele ale unui grup mare de copii.

— Holmes: Spuneți-mi, vă rog, câți copii aveți?

— Watson: Aici sînt copiii a patru familii; echipa mea este cea mai numeroasă, a fratelui meu mai puțin, a surorii și mai puțin, iar copiii unchiului sînt grupul cel mai puțin numeros.

Ei fac acest tărăboi deoarece nu le ajung pentru două echipe, cîte 9 oameni de fiecare.

O coincidență amuzantă: dacă se înmulțesc cele patru numere, care exprimă numărul de copii din familiile noastre, vom obține numărul casei noastre, pe care dv. îl cunoașteți.

— Holmes: Eu am învățat la școală matematică. Voi încerca să calculez numărul de copii din fiecare familie.

După cîteva calcule, Holmes a spus:

— Pentru rezolvarea problemei se dă prea puțin. Spuneți-mi, vă rog, unchiul are un copil sau mai mulți?

Watson a dat răspunsul cerut.

— Holmes: acum pot să dau răspunsul exact asupra numărului copiilor! Și într-adevăr a dat răspunsul corect.

Care a fost numărul casei și câți copii avea fiecare familie?

(A. Conan-Doyle, „Aventurile lui Sherlock Holmes“, G.M.F., Nr. 8 — 1961)

20. Se consideră două sate A și B și o cale ferată MN. Să se determine printr-o construcție grafică locul gării, care trebuie să fie astfel construită încît să fie egal depărtată de cele două sate.

Ce se întîmplă cînd dreapta AB este perpendiculară pe calea ferată?

• • •

21. Trei cutii conțin: una, două bile albe; alta, două bile negre; ultima, o bilă albă și una neagră.

Cutiile erau etichetate potrivit conținutului AA, NN și AN. Cineva schimbă, însă, etichetele, astfel că nici una nu se mai potrivește cu conținutul.

Cum se poate determina, printr-o singură extracție a unei bile dintr-o cutie, fără a privi înăuntru, conținutul exact al fiecărei cutii?

• • •

22. Unui școlar i se dă un număr de către învățătorul său și i se spune să-l micșoreze cu 2 și să împartă restul cu 3. El uită ce i-a spus învățătorul, căci scade 3 și împarte cu 2.

După ce spune rezultatul, învățătorul îi zice:

„Foarte bine, destul!“

Ce număr i se dăduse la început?

• • •

23. Gîndiți-vă la un număr oarecare, înmulțiți-l cu 2, adăugați la produs 30, împărțiți numărul obținut la 2, scădeți din rezultat numărul la care v-ați gîndit și veți obține rezultatul 15. Explicați de ce rezultatul este totdeauna 15, oricare ar fi numărul la care v-ați gîndit!

• • •

24. Mergînd cu viteza de 4 km pe oră, A îl ajunge pe B, care merge cu viteza de 3 km pe oră. Cînd distanța dintre ei era de 0,5 km, o muscă care ședea pe pălăria lui A, a zburat spre B, apoi înapoi spre A ș.a.m.d. și a zburat așa pînă la întîlnirea lui A cu B.

Cîți km a parcurs musca, dacă viteza ei este de 10 km pe oră?

• • •

25. Întrebată cîte mere are într-un coș, o femeie a răspuns: „Nu știu cîte am, dar pot să spun că dacă le număr cîte 2, cîte 3, cîte 4, cîte 5, cîte 6, îmi rămîne cîte un măr în coș; iar dacă le număr cîte 7, nu-mi rămîne nici un măr“.

Cîte mere avea în coș?

• • •

26. Pe unul din talerele balanței a fost așezat un calup de săpun. iar pe celălalt taler, $\frac{3}{4}$ dintr-un calup identic cu primul și încă $\frac{3}{4}$ kg. Cîntarul se găsește în echilibru perfect.

Cît cîntărește calupul?

• • •

27. Jumătate reprezintă o treime dintr-un număr. Care este numărul?

• • •

28. Să se găsească un procedeu de a afla un număr la care s-a gîndit cineva bazat pe identitatea:

$$(x + 2) \cdot 3 - 2x - 6 = x$$

• • •

29. Întîlnindu-se 16 persoane, și-au dat mîna. Cîte strîngerî de mînă au avut loc?

• • •

30. Participanții la o ședință și-au strîns mîinile și cineva a calculat că, în total, au fost 66 de strîngerî de mînă.

Cîți oameni au fost la ședință?

• • •

31. Trei copii aveau de împărțit 23 de lei și primul trebuia să ia $\frac{1}{2}$ din sumă, al doilea $\frac{1}{3}$ și al treilea $\frac{1}{8}$ din sumă.

Un coleg al lor, care mai avea și el 1 leu, a reușit să le facă această împărțire.

Cîți lei a luat fiecare copil?

• • •

32. *Puncte de vedere.*

Șase femei duc la oraș 6 coșuri cu ouă, purtînd fiecare cîte un coș. Pentru aceasta le trebuie o oră. În cît timp fac două femei aceeași treabă?

La această problemă, cinci persoane au dat următoarele răspunsuri, judecînd fiecare în felul său:

I. Dacă numărul femeilor este de 3 ori mai mic, le trebuie de 3 ori mai mult timp, deci: $6 : 2 = 3$ ore.

II. Drumul de la sat la oraș durează o oră, iar înapoi, altă oră, ceea ce face 2 ore. Trei drumuri vor dura $3 \cdot 2 = 6$ ore.

III. Să facem socoteala amănunțit:

primul drum cu 2 coșuri, 1 oră;

drumul înapoi, 1 oră;

al doilea drum cu 2 coșuri, 1 oră;

drumul înapoi, 1 oră;

al treilea drum cu 2 coșuri, 1 oră.

Rezultă un total de 5 ore.

IV. Dacă se spune că într-o oră se pot duce ouăle la oraș, înseamnă că drumul pînă la oraș durează o jumătate de oră și drumul înapoi, altă jumătate de oră.

Acum socoteala se prezintă astfel:

primul drum cu 2 coșuri, $1/2$ oră;

drumul înapoi, $1/2$ oră;

al doilea drum, dus-întors, 1 oră;

al treilea drum dus, $1/2$ oră.

Total pentru 6 coșuri, $2 \frac{1}{2}$ ore.

V. La aceste $2 \frac{1}{2}$ ore mai trebuie adăugate $1/2$ oră pentru înapoiere, deci ies, din nou, 3 ore.

Nu este exclus să se mai dea și alte răspunsuri.

Care este răspunsul bun?

• • •

33. Se parcelează un teren situat între o șosea și o cale ferată rectilinii ce merg paralel. Unui cetățean i se acordă o parcelă care are formă triunghiulară. Se fixează două vîrfuri, A și B, de-a lungul șoselei și i se lasă libertatea să aleagă singur al treilea vîrf al triunghiului.

Cetățeanul se gindește să aleagă punctul M astfel încît să cuprindă un teren cît mai mare.

Cum va trebui să procedeze?

• • •

34. Dintr-o placă de metal hexagonală să se taie un sfert fără să i se schimbe forma.

• • •

35. Un explorator merge o milă exact spre sud, își schimbă direcția și merge exact o milă spre est, își schimbă direcția și merge o milă exact spre nord.

El reajunge în punctul de unde a pornit.

Aici împușcă un urs. Ce culoare are ursul?

• • •

36. Problema bisectării crucii lorene.

Figura alăturată (20) reprezintă „crucea lorenă” la care o parte a fost hașurată.

Să se ducă o linie prin punctul A, astfel încât aria părții din stînga (hașurată) să fie egală cu aria restului.

Cît de lung este segmentul BC dacă linia este dusă corect?

(Martin Gardner, *Amuzamente matematice*)

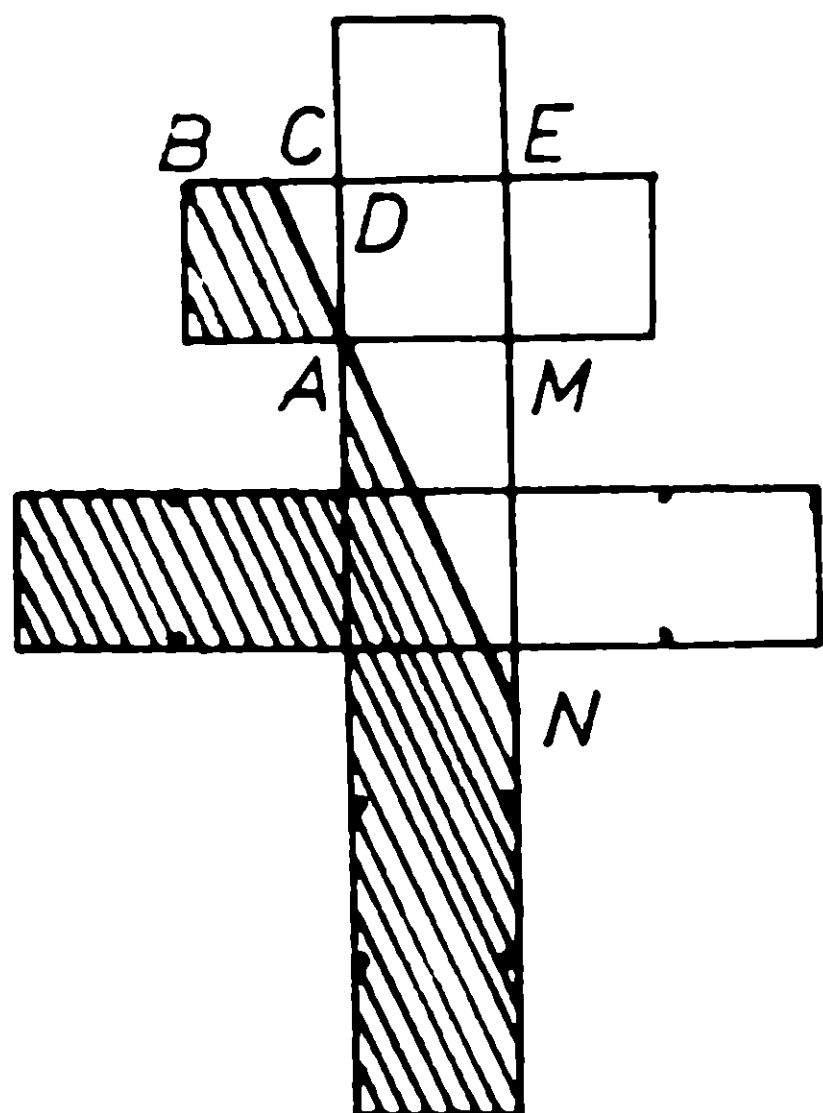


Fig. 20.

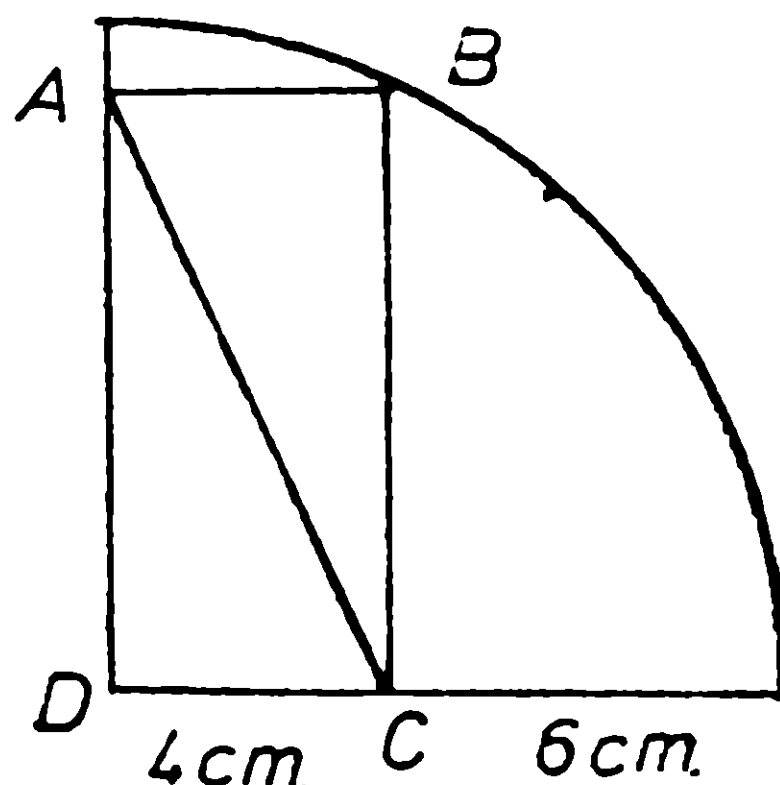


Fig. 21.

37. Ghiciți diagonala! (Problemă-fulger)

Un dreptunghi este înscris într-un sfert de cerc (fig. 21). Cunoscînd distanțele indicate, să se afle rapid lungimea diagonalei.

...

38. Să se ducă de la punctele 1, 2, 3, 4, 5 (în ordinea indicată) cîte o linie la punctele A, B, C, D, E (fig. 22), astfel ca nici una din aceste linii să nu se intersecteze.

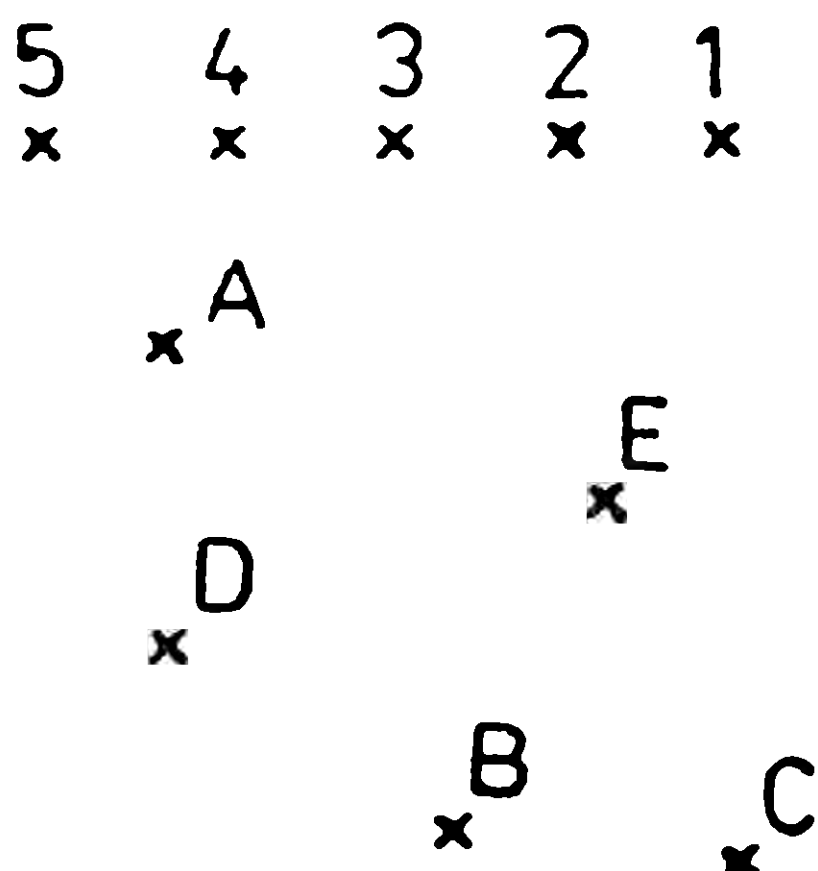


Fig. 22.

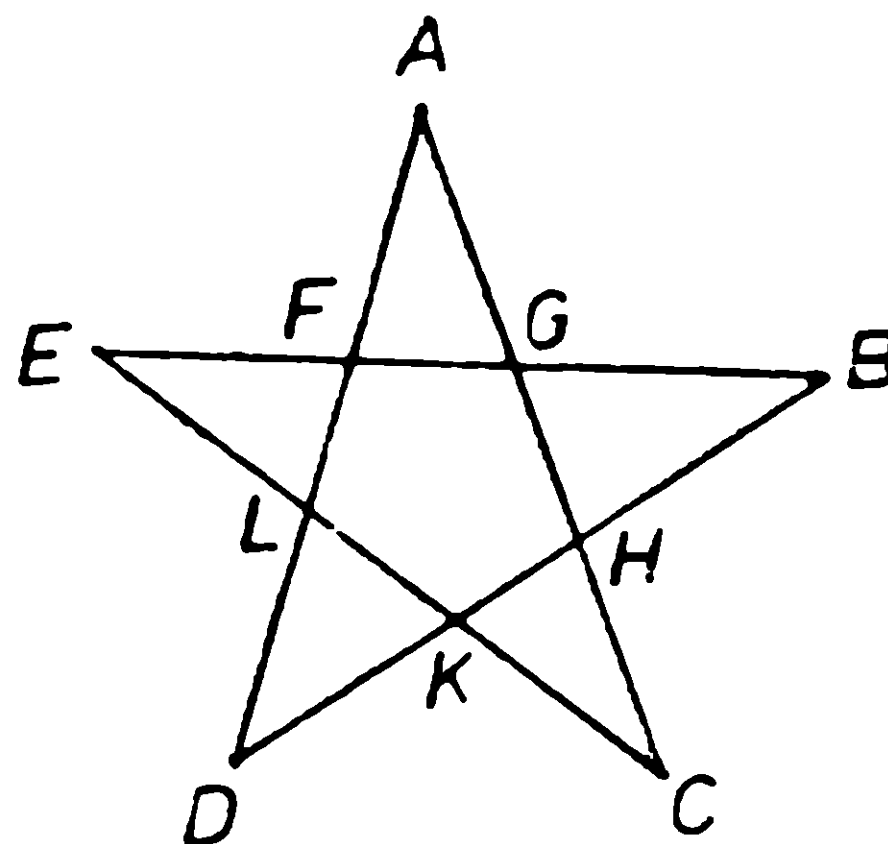


Fig. 23.

39. Să se arate dacă fig. 23, ce reprezintă o stea în cinci colțuri, poate fi trasată dintr-o singură linie și să se arate metoda de urmat.

...

40. Problemă de logică recreativă.

Trei oameni: A, B și C își dau seama că toți trei sînt „logicieni desăvîrșiți”, care pot deduce instantaneu toate consecințele unei mulțimi de premise date. Au la dispoziție patru timbre roșii și patru verzi.

Li se leagă ochii și pe fruntea fiecăruia se lipesc cîte două timbre. Apoi li se iau legăturile de la ochi. A, B și C sînt întrebați, unul după altul:

— Știți ce culoare au timbrele dv?

Fiecare răspunde „nu”. Atunci A este întrebat din nou. El răspunde iarăși „nu”. Acum i se pune întrebarea lui B, care răspunde „da”.

Care sînt culorile timbrelor lui B?

(Martin Gardner, *Amuzamente matematice*)

41. Vechi tip de enigmă logică.

Un logician, care-și petrecea concediul în Mările Sudului, nimereste într-o insulă locuită de două triburi proverbiale: cei mincinoși și cei care spun numai adevărul.

Membrii unui trib mint totdeauna, membrii celui de-al doilea trib spun totdeauna adevărul. Logicianul ajunge la o bifurcație a drumului și trebuie să-l întrebe pe un băștinaș, ce cale să urmeze pentru a ajunge la un sat.

El nu are nici o posibilitate de a ști dacă băștinașul spune adevărul sau dacă este mincinos. Dar se gîndește o clipă, după care pune o singură întrebare. Din răspuns, el află pe ce drum să apuce.

Care este întrebarea?

(Martin Gardner, *Amuzamente matematice*)

42. Trei prieteni iau masa de seară la un restaurant. Socoteala ospătarului fiind de 75 de lei, fiecare consumator își achită partea sa, înmîinîndu-i direct cîte o hîrtie de 25 de lei.

Predînd la casă banii, se constată acolo că nota fusese încărcată din greșeală cu 10 lei necuveniți. Suma se restituie pe loc ospătarului, care primește, deci, trei monede metalice a 3 lei și o hîrtie de 1 leu. Ospătarul reține leul pentru sine și restituie fiecărui client cîte 3 lei, astfel că în definitiv pe fiecare l-a costat masa numai 22 lei.

Clienții o dată plecați, ospătarul se întreabă, totuși, cu naivitate ce-au devenit cei 75 de lei încasați inițial de la acești consumatori? Cum masa au plătit-o cu 66 de lei, iar 1 leu a fost luat de ospătar, mai sînt 8 lei rămași. Cine i-a reținut?

Explicați nedumerirea ospătarului.

8. Versiuni noi ale unor probleme mai vechi

1. Ce pătrat perfect este produsul a patru numere întregi impare consecutive?

M.M. — David L. Silverman

2. Să se demonstreze că nu există nici un întreg pozitiv n pentru care $n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ să fie un pătrat perfect.

M.M. — Leo Moser

3. În ce sistem de numerație numărul 11111 este un pătrat perfect?

N.M.M. — V. Thebault

4. Să se arate că nu există nici un sistem de numerație în care numărul de trei cifre aaa să fie egal cu a^3 .

S.M.M. — Charles Mc. Cracken Jr.

5. Profesorul E. P. B. Umbugio¹ s-a fălit la toată lumea că a reușit să rezolve ecuația de gradul patru care se obține dacă se elimină radicalii din ecuația:

$$x = (x - 1/x)^{1/2} + (1 - 1/x)^{1/2}$$

Dați-i o lecție Profesorului, rezolvând această ecuație și utilizând, în acest scop, numai ecuații de gradul doi.

A.M.M. — P.M. Anselone și Sam Cook

6. La moartea sa, un fermier a lăsat moștenire fiilor săi câteva oi și un miel. Fiii au vândut aceste animale, prețul unei oi fiind de 10 dolari și prețul mielului fiind ceva mai mic. Prețul mediu pe cap de animal este egal cu numărul animalelor vândute. Știind că animalele au fost împărțite în număr

¹ Personaj închipuit.

egal între cei doi frați pentru a fi vândute, să se afle ce sumă trebuie să-i mai dea fiul care a primit numai oi, celui care a primit și mielul, pentru ca banii să fie egal împărțiți?

A.M.M. — Irving Keplansky

7. Să se arate că ecuația $(\)x^4 + (\)x^3 + (\)x^2 + (\)x + (\) = 0$, în care parantezele vor fi înlocuite cu o permutare arbitrară a numerelor 1, -2, 3, 4, -6 admite întotdeauna cel puțin o rădăcină rațională.

Charles W. Trigg

8. Să se descompună în factori, fără a grupa termenii, polinomul:
 $x^8 - x^7y + x^6y^2 - x^5y^3 + x^4y^4 - x^3y^5 + x^2y^6 - xy^7 + y^8$.

M.M. — Anice Seybold

9. Cîte rădăcini negative are ecuația:

$$x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0$$

M.M. — R.E. Horton

10. Să se simplifice fracția $(27 + 8i)/(3 + 2i^3)$.

M.M. — J.M. Howell

11. Dîndu-se $f(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, să se calculeze restul împărțirii lui $f(x^5)$ prin $f(x)$.

S.S.M. — Norman Anning

12. Evaluați expresia:

$$\left[\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 3 \cdot 6 + 12 + \dots}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + 3 \cdot 9 \cdot 27 + \dots} \right]^{1/3}$$

S.S.M. — Max Beberman

13. Să se determine n , știind că:

$$\frac{1^3 + 3^3 + \dots + (2n-1)^3}{2^3 + 4^3 + \dots + (2n)^3} = \frac{199}{242}$$

Charles W. Trigg

14. Să se demonstreze că ecuația $x^2 - 3y^2 = 17$ nu admite soluții întregi.

E.P. Starke

15. Să se arate că oricare ar fi numărul întreg pozitiv a , ecuația $x^2 - y^2 = a^3$ are totdeauna soluții întregi.

A.M.M. — L.E. Bush

16. Arătați că pentru orice valori pozitive ale lui p , q , r și s , expresia

$$\frac{(p^3 + p + 1)(q^3 + q + 1)(r^3 + r + 1)(s^3 + s + 1)}{pqrs}$$
 nu poate lua valori mai mici decît 81.

S.S.M. — R.L. Moenter

17. Dacă a, b, c sînt rădăcinile ecuației $x^3 + qx + r = 0$, să se formeze ecuația care admite ca rădăcini $(b+c)/a^2$, $(c+a)/b^2$ și $(a+b)/c^2$.

S.S.M. — Alan Wayne

18. Să se demonstreze că $n^n > 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n-1)$.

S.S.M. — Frederic E. Nemmers

19. Să se calculeze produsul $3^{1/3} \cdot 9^{1/3} \cdot 27^{1/27} \dots$

S.S.M. — J.F. Arena

20. Să se exprime ca o serie de puteri expresia:

$$1/(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8).$$

M.M. — M.S. Klamkin

21. Să se găsească toate soluțiile întregi ale ecuației:

$$y^2 + y = x^4 + x^3 + x^2 + x$$

A.M.M. — D.C.B. Marsh

22. Să se arate că ecuația

$1 + x + x^2/2! + x^3/3! + \dots + x^{2n}/(2n)! = 0$ nu admite nici o rădăcină reală.

A.M.M. — Joe Lipman

23. Folosind numai compasul, să se împartă circumferința unui cerc dat în patru arce egale (centrul cercului se presupune cunoscut).

P.M.E.Y. — John A. Dier

24. Să considerăm, în triunghiul ABC, BD și BE, trisectoarele unghiului B, iar CD și CE, trisectoarele unghiului C. E fiind punctul cel mai apropiat de atura BC, să se demonstreze că unghiurile BDE și EDC sînt egale.

M.M. — C.F. Pinzka

25. Axele de simetrie a doi cilindri circulari drepti cu diametrele bazelor de 2 cm se intersectează sub un unghi drept. Care este volumul comun celor doi cilindri?

M.M. — Leo Moser

26. O mulțime de două milioane de puncte este inclusă în interiorul unui cerc cu diametrul de 1 cm. Există oare o dreaptă care să aibă de fiecare parte a ei exact un milion de puncte? Dacă există, de ce?

M.M. — Herbert Wills

27. Să se arate că dacă a, b, c sînt lungimile laturilor unui triunghi, atunci cu segmentele de lungime $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ și $\sqrt{c}$ se poate forma, de asemenea, un triunghi.

A.M.M. — Chih-Yi Wang

28. Un triunghi echilateral și un hexagon regulat au perimetrele egale. Care este raportul ariilor lor?

M.M.

29. Să se găsească volumul tetraedrului ale cărui vîrfuri au respectiv coordonatele (F_n, F_{n+1}, F_{n+2}) , $(F_{n+3}, F_{n+4}, F_{n+5})$, $(F_{n+6}, F_{n+7}, F_{n+8})$ și $(F_{n+9}, F_{n+10}, F_{n+11})$, unde F_i este termenul al i -lea din șirul lui Fibonacci $(1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots)$.

Charles W. Trigg

30. Pe laturile BC și AD ale unui paralelogram ABCD se iau respectiv punctele E și F. Fie G intersecția lui AE cu BF și H intersecția lui ED și CF. Să se demonstreze că dreapta care trece prin punctele G și H împarte paralelogramul în două figuri egale.

M.M. — Mannis Charosh

31. Un patrulater de arie Q este împărțit de diagonalele sale în patru triunghiuri avînd ariile A, B, C și D . Să se arate că:

$$A \cdot B \cdot C \cdot D = (A+B)^2 (B+C)^2 (C+D)^2 (D+A)^2 / Q^4.$$

P.M.E.J.— Leon Bankoff

Notă:

Prescurtări folosite:

- M.M. = Mathematics Magazine
- A.M.M. = American Mathematical Monthly
- S.S.M. = School, Science and Mathematics
- P.M.E.J. = Pi Miu Epsilon Journal

Date sumare asupra unor matematicieni citați în lucrare

1. HIPOCRATE din Chios (450—400 î.e.n.), filozof și geometru grec. În afară de problema lunulelor a studiat problema dublicării cubului, reducînd-o la o dublă proporție geometrică.

2. EUDOXIU din Cnidos (408—355 î.e.n.), matematician, medic și astronom grec. A elaborat o teorie a rapoartelor și o metodă, care, în secolul al XVIII-lea, a căpătat denumirea de *metoda exhaustiei*. A demonstrat teorema asupra egalității dintre volumul piramidei și o treime din volumul prisme cu aceeași bază și înălțime (analog pentru con și cilindru).

3. HERON din Alexandria (sec. I—II), matematician și fizician grec. A scris patru tratate de mecanică. Este inventatorul aparatului „fîntîna lui Heron”. A contribuit la dezvoltarea trigonometriei, fiind considerat autorul unei formule care dă aria triunghiului în funcție de laturi.

4. PAPUS (sec. III), matematician grec; a activat în Alexandria. Este autorul celebrelor *Colecții matematice*, care conțin o analiză succintă a celor mai dificile lucrări de matematică create pînă la timpul său. Culegerea conține 8 cărți. Cartea a V-a începe cu o prefață interesantă, scrisă într-o minunată limbă literară, în care se vorbește *Despre inteligența albinelor*.

5. LIU HUEI (sec. III), matematician chinez, eminent comentator al lucrării *Matematica în nouă cărți*. În lucrările sale pune accentul pe geometria practică. El rezolvă probleme privind determinarea dimensiunilor obiectelor inaccesibile și a distanței pînă la ele, folosind în acest scop triunghiuri asemenea. Aplică la calculul lui π procedeul propus pentru prima oară de Arhimede și bazat pe aproximarea ariei cercului printr-o succesiune de arii de poligoane regulate înscrise, cu $k \cdot 2^n$ laturi.

6. DIOFANT (325—409), matematician grec, a activat în Alexandria. Lui i se atribuie publicarea primului tratat de algebră. Tratatul cuprindea 13 cărți, din care s-au păstrat numai primele 6 cărți. Opera sa conține, printre altele, un mare număr de probleme rezolvate prin ecuații de gradul I și II, precum și ecuații nedeterminate de gradul I cu două necunoscute, rezolvate în numere întregi (ecuații diofantice).

7. CIJAN ȚIU ȚIAN (sec. V), matematician chinez. Cunoaște regula sumării unei progresii aritmetice: $S = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$. Pentru stabilirea rației fo-

losește formula: $d = \frac{2 \frac{S}{n} - 2a}{n-1}$.

8. ȚU CIUN CIJI (430—501), matematician, astronom și inginer chinez. Analizează ecuațiile numerice de gradul al III-lea. Stabilește pentru valoarea lui π raportul $\frac{355}{113}$, căruia îi corespunde o precizie redescoperită, zece secole mai târziu, de matematicianul Adrian Metius (Olanda).

9. ARIABHATA din Pataliputra (476—550?), matematician indian, autor al tratatului de astronomie și matematică în versuri: *Aryabhatian* (anul 499).

Pentru rezolvarea în numere întregi a ecuației nedeterminate, el folosește metoda „împrăștierii” sau a „fărîmițării”, perfecționată ulterior de Brahmagupta și Bhaskara al II-lea, care este asemănătoare procedurii actual de descompunere în fracții continue.

10. VAN SIAO TUN (sec. VII), matematician și astronom chinez. Este autorul lucrării *Continuări la matematica străveche (Ti gu suan şu)*, (625). El rezolvă algebric probleme geometrice care conduceau la ecuații de gradul III. Fără să posede o metodă generală de rezolvare a ecuației cubice cu radicali, folosește o metodă aproximativă al cărei conținut este descris amănunțit în lucrările chineze din perioada de mai târziu, sub denumirea de *Metoda elementului ceresc*, iar prin „element ceresc” se înțelege elementul necunoscut, notat actualmente prin x .

11. ANANIA ȘIRACAȚI-vardapet (dascălul), matematician, astronom, meteorolog, istoric și geograf armean, originar din regiunea Șirac (sec. VII). Pe lângă probleme pur aritmetice, s-a ocupat de forma sferică a Pământului, de folosirea cifrei zero în matematică, de numerele poligonale.

12. ALBINUS FLACUS (numit Alcuin=prieten al templului), abate și om de știință anglo-saxon, originar din York (735—804). El propune, pentru popularizarea matematicii, probleme sub formă de ghicitori și glume. Este autorul prezumtiv al culegerii *Probleme pentru perfecționarea adolescenților (Propositiones ad acuendos juvenes)*.

13. MUHAMED al-HOREZMI (pe scurt ALHVARIZMI), matematician arab (780?—850); a activat la Bagdad. Este primul clasic al matematicii țărilor Islamului, autor a cinci opere de aritmetică, algebră, astronomie și geografie și calendar.

Din traducerea latină a manualului de aritmetică, popoarele europene au cunoscut metoda hindusă de numerație cu ajutorul a zece cifre. De asemenea manualul său de algebră a devenit prototipul manualelor europene de mai târziu.

Acest manual (*Algebr ve Almakabla*) se spune că a fost publicat către anul 820 din ordinul califului AL MAMOUN și este considerat primul tratat de algebră apărut la arabi.

Al-Horezmi consideră că ecuațiile în forma lor normală nu trebuie să conțină termeni care se scad. De aceea, după ce stabilește șase tipuri de ecuații normale, el aduce orice altă ecuație la una din aceste forme.

Dacă există termeni de scăzut, aceștia se elimină cu ajutorul al-djabr-ei, adică *prin completare*, pentru care la ambii membri ai ecuației se adaugă niște termeni egali cu cei de scăzut. Mai departe, toți termenii asemenea se reduc la unul singur cu ajutorul al-mukaba-lei, adică *prin comparație*. În plus, se reduce coeficientul termenului de gradul doi la unitate. La rezolvarea ecuației de gradul doi, se ia în considerație numai rădăcinile pozitive.

Cartea de algebră a lui Alhvarizmi i-a dat acestei ramuri a matematicii nu numai numele, ci și un caracter cu totul nou.

De la numele lui provine și termenul „algoritm” (al horitm), care simbolizează orice succesiune de calcule pentru rezolvarea unui anumit gen de probleme.

14. ABU KAMIL (al-Hasib al-Nisri, calculator egiptean) a trăit între anii 850—930; a activat în Cairo. Este autorul unui tratat de algebră tradus în latină și ebraică. El introduce pentru necunoscute denumiri speciale: prima necunoscută, șai; a doua, dinar; a treia, fals (monedă mărunță), pentru a patra, hatam (sigiliu, sfârșit).

Abu Kamil analizează îndeaproape problema expresiilor iraționale pătrate, stabilind regula: $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a+b \pm 2\sqrt{ab}}$, precum și identitățile algebrice.

În *Cartea rarităților din aritmetică (Kitab taraif fi-l hisab)* el se ocupă de rezolvarea în numere întregi a sistemelor de ecuații liniare nedeterminate.

15. ABUL VAFA din Kistan (Muhammed ibn Muhammed al-Buzdajani; 940—997), recunoscut la Bagdad ca mare matematician, face o expunere amănunțită a fracțiilor în *Cartea despre ceea ce trebuie să cunoască grămlicii, oamenii de afaceri și alții în știința aritmeticii*.

Este autor a numeroase comentarii ale lucrărilor lui Euclid, Diofant, Ptolemeu, precum și al unei opere speciale de geometrie practică, alcătuită din 12 capitole și care conține o mulțime de construcții importante în topometrie, arhitectură și geodezie.

În tratatul de astronomie *Cartea perfectă (Kitab al-kamil)* expune sistematic bazele trigonometriei și definește unitar, într-un cerc, toate liniile trigonometrice.

16. AL KARADJI (Abu Baskr Muhammed ibn al Hasan), (960?—1029), matematician arab. Este autor al lucrărilor: *Carte suficientă despre știința aritmeticii (Kitab al-kafi fi-l-kisab)* și *Al-Fahri*, vast tratat de algebră, închinat vizirului din Bagdad, în care se ocupă și de sumarea unor serii aritmetice.

17. BHASKARA ACIARYA (Înțeleptul), (1114—1178), matematician indian. A reeditat și completat opera matematică a ilustrului său înaintaș, Brahmagupta, pe care a numit-o *Monumentul algebrei indiene*. Bahskara al II-lea a fost primul care a expus în mod clar sistemul zecimal.

Opera lui cea mai de seamă este *Siddhîntasciromani*, o carte în care problemele de matematică sînt expuse sub formă de povestiri sau poezii și sînt ilustrate cu ghirlande de flori, albine, fluturi și păsările, urmărind să prezinte matematica, într-adevăr, ca ceva util și plăcut.

18. LEONARDO din Pisa (Fibonacci), (1180?—1250?), renumit matematician italian. Este autor al *Cărții abacului* (*Liber abaci*, 1202) în care expune aritmetica și algebra ecuațiilor liniare și de gradul al doilea în mod magistral. Capitolul al XII-lea conține un mare număr de diferite probleme, printre care sumări de serii: progresia aritmetică și geometrică, seria pătratelor și, pentru prima oară în istoria matematicii, sumarea unei serii recurente. Prin procedee grafice, el a găsit expresia sumei pătratelor numerelor naturale și a șirului de numere impare.

Este cunoscut, apoi, șirul lui Fibonacci: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 etc. a cărui regulă de formare se poate desprinde ușor și care se bucură de proprietăți interesante.

În lucrarea *Practica geometriei*, Leonardo demonstrează diferite teoreme printre care concurența medianelor unui triunghi și teoreme cu privire la pătratul diagonalei paralelipipedului dreptunghic sau rezolvă probleme de geometrie cu ajutorul algebrei.

Cartea pătratelor (*Liber quadratorum*) conține probleme cu ecuații nedeterminate de gradul al doilea. Este unica lucrare europeană valoroasă de teoria numerelor din acea perioadă.

19. TEETET din Atena (414?—369? î.e.n.), elev al lui Teodor din Cirene, a adus două contribuții importante în matematică, incluse mai târziu în Elementele lui Euclid. Una dintre acestea o constituie clasificarea iraționalităților pe care le împarte în patru hexade.

20. MAGAVIRA — „Om mare” (sec. IX), matematician indian. A scris în jurul anului 850: *Curs scurt de aritmetică* (*Ganita-Sara sangraha*). El folosește, pentru obținerea de triplete întregi de numere pitagoreice, formulele: $\frac{p^2 - q^2}{2}$, $\frac{p^2 + q^2}{2}$.

21. ABU ALI al—HASAN ibn al—HAISAM (965—1039), matematician, astronom, fizician și medic, născut la Basra în Irak; a lucrat la Cairo. El rezolvă cu ajutorul parabolei și al hiperbolei problema lui Arhimede (secționarea sferei printr-un plan astfel încât volumele celor două segmente formate să se afle într-un raport dat).

Consacră două opere pentru analiza lucrării clasice a lui Euclid.

Prezintă suma numerelor naturale la puterea a patra sub o formă întâlnită pentru prima oară în istoria matematicii.

22. ȚIN ȚIU ȘAO (sec. XIII), matematician chinez. Scribe în 1247 lucrarea *Nouă cărți de matematică* (*Șu Șu țiu cijan*), având un capitol introductiv teoretico-numeric și apoi o parte algebrică de bază, care conține diferite probleme și o expunere foarte completă a așa-numitei metode a lui Horner pentru ecuații de grade superioare. A elaborat un procedeu original de rezolvare în numere întregi a sistemelor de ecuații nedeterminate de gradul I.

23. CIJU ȘI ȚE (sec. XIII), matematician și explorator chinez. Este autorul lucrării *Introducere în studii matematice* (*Suan siao ciji men*, 1299), în care face o introducere generală în algebră și expune, în particular, regulile semnelor la adunare și înmulțire.

În altă lucrare, *Oglinda de jasp a celor patru elemente* (*Sî iuan iui țian*, 1303) se ocupă de rezolvarea sistemelor liniare cu patru necunoscute. Totodată, descrie „metoda lui Horner” și procedeele de formare a ecuațiilor și rezolvă o serie de probleme ce se reduc la astfel de ecuații. Cele patru elemente (necu-

noscutele) sînt considerate laturile unui triunghi dreptunghic și încă o mărime legată de ele. Ciju le numește elementele cerului — țian, ale pămîntului — di, ale omului — jen și, în sfîrșit, ale obiectului — u.

24. NARAIANA (sec. XIV), învățat indian.

25. IOHANN MÜLER din Königsberg (azi Kaliningrad) (REGIO-MONTANUS), remarcabil matematician și astronom din a doua jumătate a secolului al XV-lea, (1436—1476). A activat în Nürnberg și Viena.

Scrie opera: *Cinci cărți despre triunghiuri de toate genurile*, aceasta fiind prima lucrare din Europa în care trigonometria este privită la scară mare ca o disciplină matematică independentă.

26. PACIOLI LUCA (1445?—1514), matematician italian supranumit De Burgo, călugăr și profesor la diferite universități. Scrie în limba italiană lucrările: *Suma cunoștințelor de aritmetică, geometrie, rapoarte și proporționalități* (1487), în care arată și numărul pe degete pînă la 10 000 și *Despre proporția divină* (1497), în care tratează despre împărțirea unui segment în medie și extremă rație și alte probleme cu privire la arhitectură. El expune problema „Secțiunii de aur” după așa-numita carte a XV-a din Elementele lui Euclid (în realitate a lui Hipsicles).

Pacioli mai întocmește o culegere de probleme distractive, „de istețime”, în care se preocupă și de construcțiile aproximative ale poligoanelor cu 9, 11 și 17 laturi.

27. MAGNIŢKI LEONTI FILIPOVICI (1669—1722), matematician rus apreciat mult de țarul Petru I. A publicat în anul 1703, *ARITMETICA* o enciclopedie a cunoștințelor de matematică din acea vreme, cuprinzînd: elemente de aritmetică, algebră, geometrie și trigonometrie.

El și-a împărțit Aritmetica în două: pe prima a numit-o *Aritmetica politică*, deoarece cuprindea rezolvarea problemelor practice, iar pe a doua, *Aritmetica logistică*, deoarece rezolva probleme abstracte. Savantul Lomonosov numea *Aritmetica* lui Magnițki „Poarta științei sale” și o știa pe de rost.

Tot în anul 1703, a editat împreună cu colegii săi englezi, profesori la „Școala de navigație și matematică” din Moscova, — *Tabele de logaritmi și sinusuri, tangente și secante, spre învățătura celor sîrguincioși și iubitori de înțelepciune*.

28. LEONHARD EULER (1707—1783), celebru matematician, născut la Bâle, în Elveția, mort la Petrograd (azi Leningrad). A fost mult timp profesor la Universitatea din Petrograd și membru al Academiei de Științe din Rusia. A contribuit prin uriașa sa operă la fondarea și dezvoltarea multor discipline matematice și la aplicarea practică a lor (cercul lui Euler — al celor nouă puncte, teorema diagonalelor într-un patrulater, teorema funcțiilor omogene a lui Euler, formulele lui Euler în legătură cu numerele complexe). A îmbogățit cu descoperiri prețioase toate domeniile matematicilor (analiza matematică pură, analiza aplicată la geometrie, mecanica rațională etc.).

Orbind la 60 de ani, și-a continuat, totuși, cercetările sale pînă la moarte.

29. ION IONESCU (1870—1946), inginer și profesor distins. A luat parte la lucrările podului peste Dunăre, la Cernavoda, care s-a proiectat și executat cu personalul tehnic românesc, — ca ajutor al marelui inginer român, Anghel Saligny.

Foarte tânăr, Ion Ionescu a devenit profesor de lucrări grafice și apoi de poduri la Școala Națională de Poduri și Șosele.

A fost unul din fondatorii *Gazetei Matematice*, căreia i-a închinat o bună parte din marea sa putere de muncă. A publicat o foarte bună *Culegere de probleme de aritmetică rațională* și o carte de *Maxime și minime geometrice*.

30. TRAIAN LALESCU (1882—1929), distins matematician român, fost profesor la Universitate și Școala Politehnică din București.

S-a relevat ca om de știință, lucrările sale fiind citate în tratatele străine de specialitate. Lui i se datorește înființarea Școlii Politehnice din Timișoara al cărei prim rector a fost; de asemenea a înființat *Revista matematică* din Timișoara.

Printre lucrările sale, mai cunoscute sînt: *Geometria triunghiului* (primele două ediții în limba franceză), *Aplicațiile geometrice ale calculului infinitezimal* (partea a IV-a dintr-un tratat de geometrie analitică) și *Introducere la teoria ecuațiilor integrale*, — una din primele cărți din lume despre ecuații integrale, apărută în 1911.

Cîteva opere de matematică celebre în antichitate

1. *Papirusuri matematice*¹

a. Papirusul *Rhind* din Londra (20 m lungime, 30 cm lăţime) cuprinde 85 de probleme (calcul cu fracţii, probleme de asociaţie, ecuaţii de gradul I cu o necunoscută, calculul ariilor dreptunghiului, triunghiului, cercului şi calculul volumelor diferitelor corpuri). Toate acestea fac parte din lucrarea intitulată *Modul de calcul pentru a pătrunde lucrurile, a cunoaşte tot ce este obscur şi a învinge orice dificultăţi* — aşa-zisul manual de aritmetică al lui Ahmes (copiat de acesta).

b. Papirusul „de la Moscova” conţine 25 probleme rezolvate.

2. *Cuneiforme din Suza*²: Un fel de enciclopedie matematică, scrisă pe 44 tăbliţe de argilă uscată. Conţine, între altele, calcule numerice (numere pătratice şi numere cubice de la 1 la 59, sistem sexagesimal).

3. *Regulile funiei* (Suliva Sutra).

Redactată în India (sec. 7—5 î.e.n.), conţine preţioase cunoştinţe privind construcţiile geometrice şi unele calcule matematice.

Problemele de construcţie sînt legate, în primul rînd, de construirea altarelor la temelia cărora se află figuri stabilite cu precizie. Construirea unghiului drept, a pătratului, a triunghiurilor dreptunghice (laturile avînd valori întregi), formarea unor trapeze din aceste triunghiuri, transformarea pătratului de arie a într-un pătrat de arie na , transformarea unui dreptunghi într-un pătrat echivalent etc. sînt în centrul acestor preocupări. Un loc important îl ocupă şi teorema atribuită ulterior lui Pitagora.

Autorii *Regulilor funiei* folosesc cinci triunghiuri dreptunghice cu următoarele laturi întregi: 3, 4, 5; 5, 12, 13; 8, 15, 17; 7, 24, 25; 12, 35, 37 şi altele asemănătoare lor.

Funiile, divizate în părţi corespunzătoare, serveau la construirea unghiului drept. Pentru a trece de la altare cu fundaţie pătrată la cele circulare şi invers, în *Regulile funiei* sînt arătate unele procedee de circulaţiuni ale pătratului şi cvadraturi ale cercului.

¹ Anul 2000 î.e.n.

² Idem.

4. *Matematica în nouă cărți* (*Țiu cijan suan șu*) este opera centrală din literatura matematică a Chinei antice (206 î.e.n.—25 e.n.), ajunsă pînă în zilele noastre. Conține 246 probleme cu un ansamblu foarte bogat de cunoștințe care caracterizează nivelul științei în perioada primei dinastii Han. Cele nouă cărți se referă, respectiv, la:

- a) Reguli pentru măsurarea ogoarelor;
- b) Raportul între diferitele feluri de culturi de cereale;
- c) Probleme de diviziune (împărțirea în trepte);
- d) Determinarea laturii unui dreptunghi în raport de arie și de cealaltă latură, precum și a diametrelor cercului și sferei. Se ajunge la descrierea extragerii rădăcinii pătrate și cubice, cea mai veche pe care o cunoaște istoria;
- e) Estimarea lucrărilor de construcție (ziduri, canale, baraje);
- f) Repartiția proporțională;
- g) Adaus și lipsă; indică procedee pentru rezolvarea sistemelor de două ecuații de gradul I cu două necunoscute;
- h) Fan-cen, algoritm general de rezolvare a unor sisteme liniare determinate, cu mai multe necunoscute. Această metodă este transformată mai târziu (1683) de matematicianul japonez Seki Șen-Suke Kowa într-un fel de teorie a determinantilor;
- i) Probleme cu triunghiuri dreptunghice (Gou-gu) cu relații exprimate prin teorema lui Pitagora (gou=cateta mică, gu=cateta mare, verticală).

5. *Știința perfecționată a lui Brahma* (Brahma sphuta siddhanta). Operă în versuri compusă din douăzeci de cărți, dintre care numai două au conținut matematic. Cartea a 12-a cuprinde chestiuni de aritmetică și geometrie, iar cartea a 18-a, probleme de algebră (ecuații determinate și nedeterminate de gradul întâi și al doilea). A fost scrisă în anul 628 de Brahmagupta.

Orientare (relativă)

asupra nivelului problemelor

a) Pagini 21—43.

Nivel elementar: 1—4, 12, 14—16, 19, 21—24, 31, 32, 34, 35, 37, 42, 60, 62, 66, 67, 72, 74, 86—97, 99—101, 103—105, 107, 112, 114—117, 119—126, 128—137.

Nivel mediu: 5—9, 11, 13, 18, 20, 25—30, 33, 36, 38—41, 43—45, 47—51, 53, 54, 57, 61, 62, 64, 65, 68, 69, 71, 73, 75—81, 83, 98, 102, 106, 108—111, 113, 118, 127.

Nivel superior: 10, 17, 46, 52, 55, 56, 58, 59, 70, 84, 85.

b) Pagini 44—58.

Nivel elementar: 1—7, 11, 12, 16, 20—22, 27, 28, 30, 33—35, 37, 41, 48—51, 53, 55, 57, 70.

Nivel mediu: 8—10, 14, 15, 17, 18, 23—26, 29, 36, 39, 40, 42, 43, 46, 47, 52, 54, 56, 58—67, 69, 71, 72.

Nivel superior: 44, 68, 73.

c) Pagini 67—69: nivel elementar.

d) Pagini 82—86: nivel mediu.

e) Pagini 87—95: nivel elementar.

(19,29 nivel mediu).

f) Pagini 96—99

Nivel mediu: 1—6, 8—10, 13, 17, 19, 23, 24, 27, 28.

Nivel superior: 7, 11, 12, 14—16, 18, 20—22, 25, 26, 29, 30.

RĂSPUNSURI

1. Probleme antice și medievale

1. (Cum se citea pe vremea aceea.) O mie de mii mii mii mii mii mii de cinci ori și o sută de mii mii mii mii de patru ori și optzeci de mii mii mii mii de patru ori și apoi șapte sute de mii mii mii de trei ori și trei mii mii mii de trei ori și cincizeci și una de mii mii de două ori și patru sute de mii și nouăzeci și două de mii și opt sute șase zeci și trei.

2. Fie n numărul și m , respectiv k , multiplul. Avem succesiv: $n-1=m$ de 3, 4, 5 = $m \cdot 60$; $n=60k+1=7k$. Rezultă $k=5+7 \cdot m$.

Pentru $m=0$, $k=5$, iar $n=301$; pentru $m=1$, $k=12$, $n=721$ etc.

3. Problema implică rezolvarea unui sistem de congruență de gradul întâi modulo n .

Regula lui Sun-țzî glăsuiește:

„Prin împărțire cu 3, restul este 2. De aceea luați 140. Prin împărțire cu 5, restul este 3, de aceea luați 63. Prin împărțire cu 7, restul este 2, de aceea luați 30. Adunându-le împreună obținem 233. De aceea scădeți 210 și obțineți răspunsul; adică 23”.

„În general — spune Sun țzî, dacă restul împărțirii cu 3 este 1, luați 70; iar dacă restul împărțirii cu 5 este 1, luați 21; dacă restul împărțirii cu 7 este 1, luați 15.

Dacă suma acestor numere este mai mare decât 106, scădeți câte 105 înainte de a căpăta răspunsul.”

În rezolvarea modernă avem: $n-2=\text{mult. de } 3 \text{ și } 7=\text{mult. } 21$; $n=21k+2$; pentru $k=1$, $n=23$; pentru $k=2$, $n=44$ nu verifică și la împărțirea cu 5. Deci soluția este $n=23$.

4. Bhaskara ia pe 60 drept număr căutat, el fiind cel mai mic multiplu comun al lui 3, 4, 5, 6 și văzînd că la rest se obține 3, găsește soluția $60 \cdot \frac{6}{3} = 120$.

În rezolvarea noastră: $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{19}{20}$; $1 - \frac{19}{20} = \frac{1}{20}$ reprezintă 6 lotuși. Rezultă: $6 \cdot \frac{20}{1} = 120$ lotuși.

5. În rezolvarea actuală, considerăm că avem o progresie aritmetică:

$$S = \frac{a + a + 5 \cdot 2}{2} \cdot 3; 48 = 3(2a + 10); a = 3, \text{ deci primul primește 3 pîini,}$$

al doilea 5 pîini etc.; ultimul primește 13 pîini.

6. Problema trebuie înțeleasă astfel: în fiecare casă există 7 pisici; fiecare pisică mănîncă 7 șoareci; fiecare șoarece, 7 spice; fiecare spic, fiind semănat, ar da 7 măsuri de grăunțe; se cere să se găsească suma (o progresie geometrică):

$$S_5 = \frac{7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5}{7 - 1} = \frac{7(7^5 - 1)}{6} = \frac{7 \cdot 16\,806}{6} = 7 \cdot 2\,801 = 19\,607$$

7. R. 137 256

8. R. $7^7 = 960\,799$

9. R. Formează „coeficientul”¹ inferior:

$$\frac{a_7 + a_8 + a_9}{3} = a_8 = \frac{4}{3}$$

Calculează „coeficientul” superior:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{4}{3} = \frac{a_2 + a_3}{2}$$

Împarte diferența $\frac{4}{3} - \frac{3}{4}$ cu diferența: $9 - \left(\frac{4}{2} + \frac{3}{2}\right)$,

$$\text{obține } d = \frac{7}{66}; \quad a_1 = \frac{39}{66}$$

În rezolvarea modernă:

$$3a_1 + 21d = 4 \qquad a_1 + 7d = \frac{4}{3}$$

$$(2a_1 + 3d) \cdot \frac{4}{2} = 3 \qquad 2a_1 + 3d = \frac{3}{2}$$

$$\text{Soluție: } d = \frac{7}{66}, \quad a_1 = \frac{13}{22}$$

10. Calculul lui Naraiana este următorul:

O vacă, în 20 de ani, dă 20 de vițeale în prima generație:

— prima vițea, din prima generație, dă 17 vițeale în a doua generație, a doua 16 etc. Cu totul, în a doua generație, vor fi:

$$17 + 16 + \dots + 1 = S_{17}^{(1)};$$

— prima vițea din cele 17 din a doua generație va da 14 vițeale în a treia generație, a doua — 13 etc.

¹ Sinonim ecuație.

În total, vițelele acestui grup vor da:

$$14 + 13 + \dots + 1 = S_{14}^{(1)} \text{ urmașe;}$$

— prima vițea din cele 16 din a doua generație va da 13 vițele în a treia generație; a doua, 12 etc.

În total, vițelele din această grupă vor da:

$$13 + 12 + \dots + 1 = S_{13}^{(1)} \text{ urmașe.}$$

Toate vițelele din a doua generație vor da în a treia generație:

$$S_{14}^{(1)} + S_{13}^{(1)} + \dots + S_1^{(1)} = S_{14}^{(2)}$$

Raționînd în mod analog mai departe, Naraiana exprimă numărul total al vacilor din cireadă, după 20 de ani, prin suma:

$$\begin{aligned} 1 + 20 + S_{17}^{(1)} + S_{14}^{(2)} + \dots + S_2^{(6)} &= 1 + 20 + \frac{17 \cdot 18}{1 \cdot 2} + \\ &+ \frac{14 \cdot 15 \cdot 16}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} = 1 + 20 + 153 + 560 + 1001 + \\ &+ 792 + 210 + 8 = 2\,745. \end{aligned}$$

Problema se poate rezolva și astfel:

La începutul primului an, cireada este alcătuită din două animale; la începutul anului doi, din trei; apoi din patru și șase. Începînd cu anul patru, efectivul cirezii, la începutul anului $K > 4$, se poate exprima prin relația recurentă:

$$S_k = S_{k-1} + S_{k-3}$$

și cu ajutorul ei se poate calcula $S_{20} = 2\,745$.

11. Problema era rezolvată astfel: la început se determina cota — parte ce revenea fiecărui frate în medie, adică 10 șekeli; apoi suma cotelor fraților 8 și 3 (20 de șekeli). Mai departe, surplusul cotei fratelui 3 asupra cotei fratelui 8 (8 șekeli) și, în sfîrșit, surplusul căutat, adică diferența cotelor progresiei date. Rezolvarea care se face pe cale aritmetică, după un plan gîndit, presupunea cunoașterea proprietăților progresiei aritmetice, însă nu se foloseau formulele algebrice sub formă explicită.

$$12. \text{ R.I. } 1 + \frac{x-1}{7} = \frac{6+x}{7}$$

$$R_1 = x - \frac{6+x}{7} \quad R_1 = \frac{6x-6}{7} - 2 = \frac{6x-20}{7}$$

$$\text{II. } 2 + \frac{1}{7} \times \frac{6x-20}{7} = \frac{78+6x}{49}$$

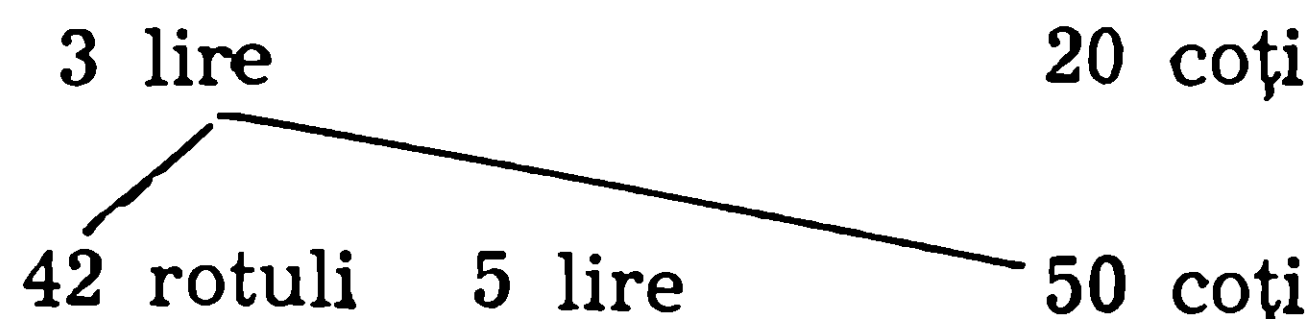
$$\text{I} = \text{II} \longrightarrow \frac{6+x}{7} = \frac{78+6x}{49} \longrightarrow x = 36 \text{ monede; } 36 : 6 = 6 \text{ copii}$$

13. Ei avuseseră 250 de porci, pe care-i împărțiră în două turme de câte 125 de porci: una, cu porci grași, alta cu porci slabi. Primul vîndu 120 de porci la prețul de 2 porci cîte 1 sold; celălalt, 120 de porci, la prețul de 3 porci cu cîte 1 sold, adică vîndură 5 porci cu cîte 2 sold.

Primul a primit 60, al doilea, 40 sold; așadar, împreună, 100 de sold și au rămas cu $5+5=10$ porci, care reprezintă cîștigul lor.

Rezolvarea cere nu numai cunoștințe de matematică, ci și o dibăcie de negustor.

14. Numerele date se așază după schema:



Rezultatul se obține împărțind produsul numerelor legate prin linii la produsul celorlalte numere:

$$x = \frac{3 \cdot 50 \cdot 42}{20 \cdot 5} = 63 \text{ rotuli de bumbac.}$$

O rezolvare mai simplă (amplificînd cu 5):

100 coți=15 lire=126 rotuli; rezultă: 50 coți=63 rotuli.

15. Leonardo o rezolvă ca o problemă de aliaje (un aliaj de titlu 30 : $30=1$ trebuie să fie alcătuit din cantități întregi cu titluri 3, 2, $1/2$) și prezintă unica soluție întreagă: 3, 5 și 22.

În rezolvarea algebrică obișnuită se formează sistemul:

$$\begin{cases} x+y+z=30 \\ 3x+2y+z/2=30, \end{cases} \text{ care se reduce la ecuația } 5x+3y=30; \text{ rezolvînd}$$

în numere întregi, obținem soluțiile:

$x=3$, $y=5$, de unde $z=22$ sau $x=6$, $y=0$, $z=24$ și $x=0$, $y=6$, $z=24$; dar aceste soluții nu convin fiind vorba de 3 feluri de păsări.

16. Problema se rezolvă după procedeul falselor poziții¹. În n zile întregi, trăpașul și gloaba parcurg împreună $290n - 6\frac{1}{4}(n^2 - n)$ li; drumul total trebuie să alcătuiască 6 000 li. Pentru $n=15$, lipsa va fi de $6\,000 - 5\,662\frac{1}{2} = 337\frac{1}{2}$ li, iar pentru $n=16$ va fi un prisos de $6\,140 - 6\,000 = 140$ li.

Admițînd că în cuprinsul fiecărei zile vitezele nu se schimbă, obținem:

$$x = \frac{15 \cdot 140 + 16 \cdot 337\frac{1}{2}}{140 + 337\frac{1}{2}} = 15\frac{135}{191} \text{ zile}$$

¹ Falsă poziție (ipoteză) menită să scoată în evidență un rezultat posibil.

17. Răspunsul se obține prin sumarea seriei (recurente):

$1 + 2 + 3 + 5 + \dots + 377$, unde fiecare termen, afară de primii doi, este egal cu suma celor doi termeni precedenți (șirul lui Fibonacci). Rezultă 985 perechea.

18. Răspunsul lui Leonardo este 1, 3, 9, 27, ... și se bazează pe faptu că orice număr întreg poate fi reprezentat sub forma unei sume sau diferențe a diferitelor puteri ale numerelor 3 și 1.

Depinde, însă, dacă se pun greutatea numai pe un taler sau pe ambele; se folosește, în primul caz, baza 2, iar în al doilea caz, baza 3.

19. Folosind metoda falsei poziții (ipoteză), Leonardo găsește ca rezultat numărul 12 și subliniază că trebuie ales orice număr divizibil prin numitorii fracțiilor date.

Atît enunțul problemei, cît și rezultatul obținut sînt neclare. O rezolvare simplă ar fi: $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 21$, de unde înălțimea arborelui, $x = 36$ schioape, rezultat care satisface sublinierea făcută de Leonardo.

20. Această problemă a devenit celebră în teoria probabilităților. Pacioli presupune, în mod eronat, că în proporția de 5/2. Rezultat real 1/1. Justificare: la oprirea jocului nici unul n-a realizat 6 puncte (se exclud rezultatele anterioare). Nici unul nu a câștigat, deci miza trebuie împărțită în mod egal.

21. Aplicînd procedeul falsei poziții, Leonardo ia avutul celui de al doilea ca obiect (necunoscută) și 7 dinari; atunci primul om, conform condiției, trebuie să aibă 5 obiecte fără 7 dinari. Dacă primul îi va da celuiilalt 5 dinari, atunci primul va rămîne cu 5 obiecte fără 12 dinari, iar al doilea va avea 1 obiect și 12 dinari.

În acest fel, suma unui obiect cu 12 dinari este de șapte ori mai mare decît cinci obiecte fără 12 dinari, de unde 34 de obiecte fac 96 dinari, un obiect este $2\frac{14}{17}$ dinari etc.

$$A = 7\frac{2}{17} \text{ dinari}; \quad B = 9\frac{14}{17} \text{ dinari.}$$

22. Soluția se poate exprima prin ecuația:

$$(7 + 10)x = 90; \text{ se dă pentru } x \text{ valorile } x_1 = 5; x_2 = 6.$$

Enunțul problemei este neclar, dar ținînd seama de rezolvarea lui Bhaskara, sîntem conduși la următoarea interpretare: creșterea celui aflat sus, pe zid, se face în jos (deci nu se ridică), iar a celui de jos, de pe pămînt, se face în sus. Rezultă: $x = \frac{90}{17}$. Rezultatul fiind dat în zile (număr întreg) se ia aproximația prin lipsă (5 zile) sau prin adaus (6 zile).

$$\mathbf{23.} \quad R. \quad \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{11} + 280 = x; \quad x = 1\,760 \text{ oameni.}$$

$$\mathbf{24.} \quad R. \quad N = \frac{150}{9-7} = 75 \text{ salturi.}$$

25. Problemă liniară nedeterminată. Rezultatul obținut de Alk-win: 11, 15, 74. În rezolvarea algebrică, avem:

$$\begin{cases} x+y+z=100 \\ 3x+2y+z/2=100 \text{ etc. (Vezi problema 15.)} \end{cases}$$

26. Tabelul trebuie să fie:

$$\begin{array}{ccc} -5 & 3 & 2 \\ 6 & -9 & 5 \\ 8 & 3 & -13 \\ -600 & & 1\ 000 \end{array}$$

În regula de rezolvare se spune:

„Întocmește tabelul fan-cen. Stabilește că 2 bivoli și 5 berbeci sînt pozitivi, 13 porci sînt negativi, iar rămășița de țiani este pozitivă. Mai stabilește că trei bivoli sînt pozitivi, 9 berbeci negativi, iar 3 porci, pozitivi; mai stabilește că 5 bivoli sînt negativi, 6 berbeci sînt pozitivi și 8 porci sînt pozitivi, iar lipsa de țiani este negativă.

Calculează după procedeul cijen-fu“.

Răspuns: 1 200; 500; 300.

În rezolvarea modernă, se stabilește sistemul:

$$13z + 1\ 000 = 2x + 5y$$

$$9y = 3x + 3z$$

$$5x - 600 = 6y + 8z \text{ etc.}$$

27. Rezolvarea era redactată astfel:

„Înmulțește (00)444 320 cu (00)444 320. (000)33 204 374 640; adaugă (000)444 320 la 1 001 640. 1 045 deînmulțitul.

Scade (00)444 320 din 1 001 640 : (0)59 15 33 20 înmulțitorul“.

Este o problemă pe care noi o denumim astăzi „ecuație pătratică“. Dacă exprimăm această problemă și cele asemănătoare ei, precum și rezolvarea lor în notația algebrică actuală, obținem:

$$x + \frac{1}{x} = a; \quad (x_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1}; \quad x_2 = \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 1}).$$

28. Se notează cu x și y cantitățile, cu u și v prețurile unitare. Rezultă sistemul:

$$\begin{cases} x + y = 78 \\ ux + vy = 576 \\ v = u + 1, \text{ de unde } 78u + y = 576; \end{cases}$$

împărțim 576 la 78, rezultă: $576 = 78 \cdot 7 + 30$, convine; sau $576 = 78 \cdot 6 + 108$, nu convine ($y < 78$).

29. Toate aceste probleme au soluția: $x=30$; $y=20$.

30. Soluția se obține desfășurînd cilindrul pe un plan. R. 2 cijiani, 9 ci adică $\sqrt{20^2 + (7 \cdot 3)^2}$.

31. Regula lui Liu Huei corespunde următoarelor formule:

$$x = \frac{be}{d-c} + e; \quad y = \frac{bc}{d-c}$$

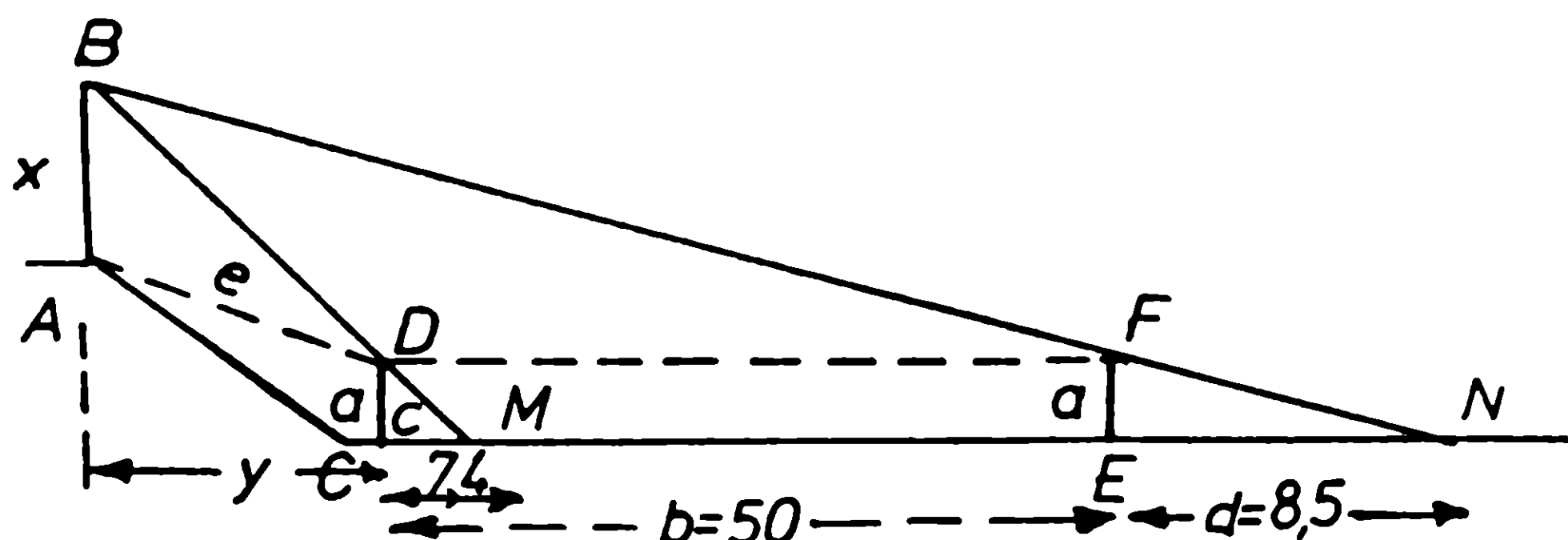


Fig. 24.

32. Cijan Luan (sec. VI) dă unica soluție posibilă:

15 cocoși, 1 găină, și 84 de pui.

Într-o altă problemă cu condiția:

$4x + 3y + \frac{z}{3} = 100$, Cijan Luan prezintă, de asemenea, o singură soluție:

$x=8$, $y=14$, $z=78$, deși există și o a doua soluție: $x=16$, $y=3$, $z=81$.

Cijan Țiu Țian (a doua jumătate a secolului al VI-lea) exprimă prin cuvinte următoarele ecuații:

$$x + y + z = 100$$

$$5x + 3y + \frac{1}{3}z = 100$$

și dă trei răspunsuri: 4 cocoși, 18 găini și 78 de pui; (8, 11, 81) și (12, 4, 84).

El observă că numărul cocoșilor crește de fiecare dată cu 4, numărul găinilor scade cu 7, iar numărul puilor crește cu 3.

Soluția sistemului se poate exprima parametric: $x=4t$; $y=25-7t$; $z=75+3t$, în care t ia valorile întregi $0 \leq t \leq 3$.

În rezolvarea noastră se formează sistemul nedeterminat:

$$x + y + z = 100$$

$$5x + 4y + \frac{z}{4} = 100.$$

Se ajunge la o ecuație în x și y care se rezolvă în numere întregi (vezi problema 15). Rezultă soluția: $x=15$ cocoși, $y=1$ găină, $z=84$ pui.

33. Însemnând prin d averea, prin x partea unui fiu și prin y ceea ce îi revine acelui om, noi am exprima problema prin ecuațiile:

$$\begin{cases} z = y + 4x \\ y = x + \frac{1}{4}\left(\frac{z}{3} - x\right) + d \end{cases}$$

și, făcând substituția, am obține relația:

$$z = 5\frac{2}{11}x + 1\frac{1}{11}d.$$

Al-Horezmi exprimă același mod de rezolvare prin următoarea regulă:
„Ia o treime din avere și scade din ea o parte, apoi scade 1/4 din ceea ce a rămas din 1/3 de avere fără o parte și un dirhem, așa încît rămîn 3/4 și 1/3 din avere sau 1/4 din avere fără 3/4 de părți și fără dirhem“; în notația noastră

$$\frac{1}{3}z - x - \frac{1}{4}\left(\frac{z}{3} - x\right) - d = \frac{1}{4}z - \frac{3}{4}x - d.$$

Aceasta se adaugă la 2/3 din avere; atunci 11 din 12 părți de avere fără 3/4 de părți și fără un dirhem sînt egale cu 4 părți $\left(\frac{2}{3}z + \frac{z}{4} - \frac{3}{4}x - d = \frac{11}{12}z - \frac{3}{4}x - d = 4x\right)$.

Mai departe se face completarea cu trei pătrimi dintr-o parte și un dirhem, după care 11 din 12 părți de avere sînt egale cu $4\frac{3}{4}$ părți și 1 dirhem (respectiv $\frac{11}{12}z = 4\frac{3}{4}x + d$).

Noi am fi înmulțit cu $\frac{12}{11}$; Al-Horezmi adaugă la fiecare termen unul din cele 11 părți ale lui și obține că averea este egală cu $5\frac{2}{11}$ dintr-o parte și $1\frac{1}{11}$ dirhemi.

34. Problema se reduce la o ecuație de gradul întâi: $900 + x^2 = (50 - x)^2 + 400$; $x = 20$ c de la baza palmierului mai înalt etc.

35. În notația noastră, rezultă sistemul:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x\left(10 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) = 114 \end{cases} \quad x = 8; \quad y = 2.$$

36. *„Cantitatea de bu, parcursă de la poarta nordică, înmulțește-o cu cantitatea dublă de bu (parcursă) spre vest, aceasta este deîmpărțitul.*

Adună cu cantitatea de bu parcursă de la poarta sudică, — acesta este împărțitorul suplimentar (tzun-fa). Extrage rădăcina pătrată și aceasta va fi latura orașului.“ ($x = 250$)

În rezolvarea noastră (o soluție):

$\triangle ABC \sim \triangle CDE$ (fig. 25),

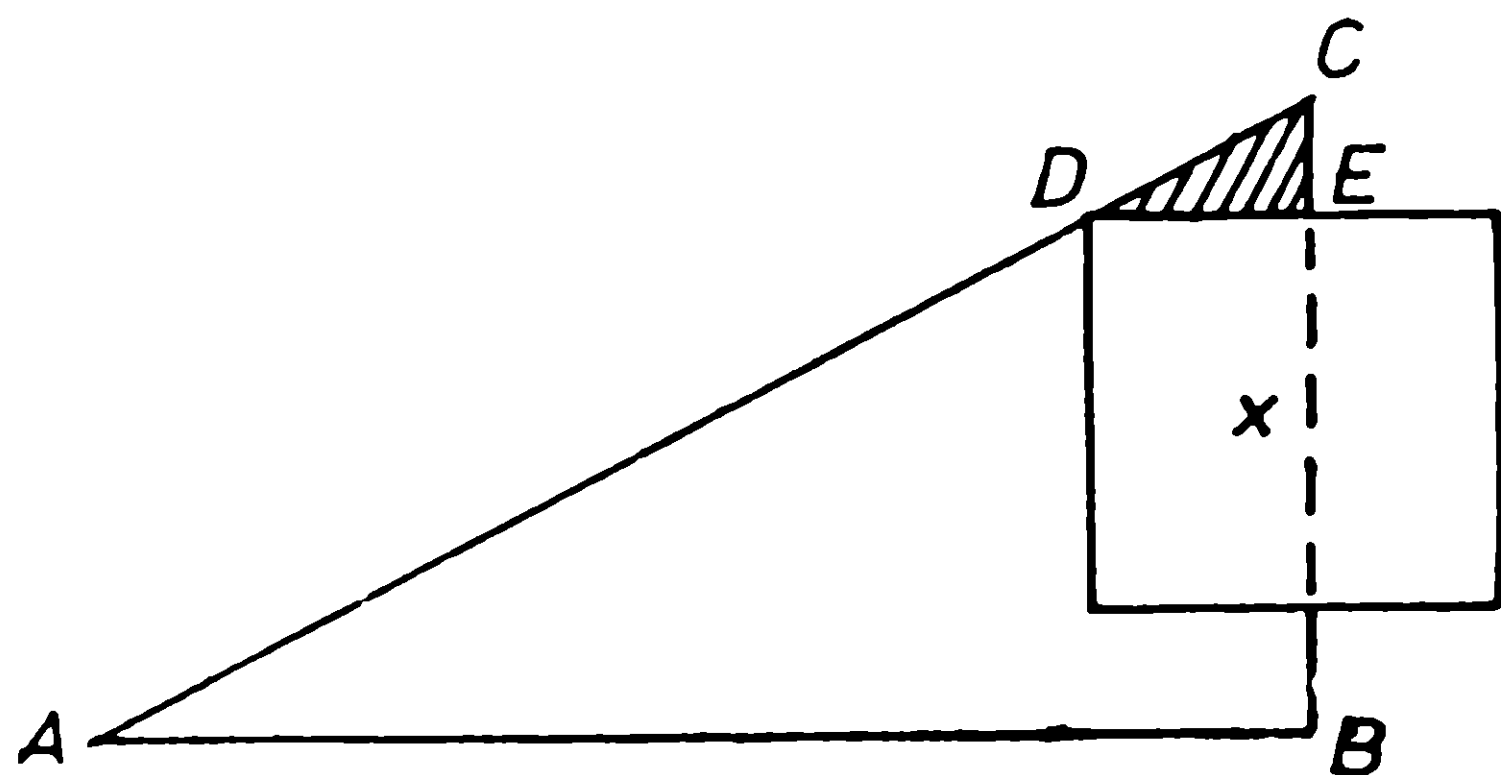


Fig. 25.

$$\frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB} \quad \frac{20}{(20+14)+x} = \frac{\frac{x}{2}}{1775},$$

$$20 \cdot 2 \cdot 1775 = 34x + x^2,$$

$$x^2 + 34x - 71\,000 = 0, \quad x = 250 \text{ bu.}$$

37. R. a) $x = \frac{a^2 - h^2}{2h} = 12$ ci; b) $(x + h)^2 - x^2 = a^2$.

38. R. a) Adunînd (-8) , rezultă: $(x-2)^3=27$ etc.

b) Bhaskara adaugă la ambele părți cantitatea $4x^2-400x+1$, de unde: $(x^2+1)^2=(2x+100)^2$ etc.

$$39. R. x - \frac{x^3}{12 \cdot 30} = X; \quad \frac{3}{20 \cdot 16} X^2 - X + 20 = 0$$

$$3X^2 - 20 \cdot 16X + 400 \cdot 16 = 0$$

$$X = \frac{160 + 4 \cdot 20}{3} = 80$$

$$X = x - \frac{x^3}{12 \cdot 30} = 80; \quad 360x - x^3 = 28\,800$$

$$x^3 - 360x + 28\,800 = 0$$

$$x = 180 + 60 = 240; \quad (x_2 = 120)$$

40. $2x^2 + 100 - 20x = 58$. Al-Horezmi face succesiv transformările: $2x^2 + 100 = 58 + 20x$ (al djabr)¹; apoi împarte la doi și reduce termenii asemenea:

$$x^2 + 21 = 10x \text{ (al-mukabala)}^2$$

și, astfel, se obține o ecuație de tipul 5, pentru rezolvarea căreia aplică următoarea regulă:

„Împarte prin doi rădăcinile și vei obține 5, înmulțește aceasta cu egalul său, vei obține 25; și scade din aceasta 21, care adăugate la pătrat vor rămîne 4, extrage rădăcina — vei avea 2 și scade aceasta din jumătatea rădăcinilor, adică din 5, vor rămîne 3; aceasta va fi rădăcina pătratului pe care o cauți, iar pătratul este 9. Dacă vrei însă, adaugă aceasta la jumătatea rădăcinilor, vei obține 7 și aceasta este rădăcina pătratului pe care îl cauți, iar pătratul este 49.”

41. Ecuația corespunzătoare de gradul al II-lea este: $(2 + \sqrt{5})x^2 + 100 = (20 + \sqrt{500})x$, care înmulțită cu $\sqrt{5}-2$ se aduce la forma: $x^2 + \sqrt{50\,000} - 200 = 10x$, cu rădăcina:

$$x = 5 - \sqrt{225 - \sqrt{50\,000}}.$$

Rezolvarea a doua: Dacă $\frac{10-x}{x} = y$, atunci:

$$y^2 + 1 = \sqrt{5}y \text{ și } y = \sqrt{1 \frac{1}{2}} - \frac{1}{2},$$

Direct din ecuația liniară: $\frac{10-x}{x} = \sqrt{1 \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}$ necunoscuta x se obține cu numitor irațional. De aceea Abu-Kamil ridică la pătrat ambele părți ale ecuației $10 - \frac{x}{2} = \sqrt{1 \frac{1}{4}} x^2$ și din ecuația $x^2 + 10x = 100$, găsește $x = \sqrt{125} - 5$.

43. R. Se ia $x - 3\sqrt{x} = y^2$ etc.

44. R. Se caută inversul lui $3 + \sqrt{5}$ care este

$$\frac{1}{3 + \sqrt{5}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}.$$

¹ Trecerea termenilor dintr-o parte în alta.

² Reducere a termenilor asemenea.

45. Se ține seama de egalitatea: $\sqrt{a} \pm \sqrt{b} = \sqrt{a+b \pm 2\sqrt{ab}}$.

47. R. a) $x^2 + 5 = y^2$; al-Karadji ia $y = x + 1$, de unde $x = 2$

b) $x^2 - 10 = y^2$; luînd $y = x - 1$, rezultă $x = \frac{11}{2}$.

49. Dacă se ia: $xy = p$ și $x + y + z = q$, atunci calculele sînt următoarele:

$$(x + y)^2 - (x^2 + y^2) = 2p$$

$$(x + y + z)(x + y - z) = 2p$$

$$\text{De aici } x + y - z = \frac{2p}{q}; \quad z = \frac{q^2 - 2p}{2q}$$

$$\text{Din aceleași ecuații avem: } x + y = \frac{q^2 + 2p}{2q}. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} xy &= p \\ x + y &= \frac{q^2 + 2p}{2q} \end{aligned}$$

$$z^2 - \frac{q^2 + 2p}{2q} z + p = 0$$

$$2qz^2 - (q^2 + 2p)z + 2pq = 0$$

$$z_1 = x = \frac{q^2 + 2p + \sqrt{q^4 + 4p^2}}{4q}$$

$$z_2 = y = \frac{q^2 + 2p - \sqrt{q^4 + 4p^2}}{4q}$$

50. R. Diagonalele sînt egale cu $42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{60^2}$; adică cu produsul lor 30 prin $1 + \frac{24}{26} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}$ (valoarea aproximativă a lui $\sqrt{2}$).

51. Combinînd procedeele propriu-zis algebrice cu regula falsei poziții, Abu-Kamil dă următoarea rezolvare:

Se ia pentru început $x_1 = 1$. Atunci din condițiile a doua și a treia pentru y_1 se obține o ecuație bipătrată:

$$1 + y_1^2 = y_1^4$$

$$\text{și } z_1 = y_1^2 = \frac{1}{2} + \sqrt{1 \frac{1}{4}}; y_1 = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{1 \frac{1}{4}}}$$

$$x_1 + y_1 + z_1 = 1 \frac{1}{2} + \sqrt{1 \frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{1 \frac{1}{4}}}$$

$$\frac{x}{1} = \frac{10}{1 \frac{1}{2} + \sqrt{1 \frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{4}}}$$

După o serie de transformări se aduce această ecuație liniară la una de gradul al doilea;

$$100 + 3x^2 + \sqrt{5x^4} = 30x + \sqrt{500x^2}$$

și înmulțind cu $\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{4}$

rezultă: $x^2 + 75 - \sqrt{3 \cdot 125} = 10x$, de unde se obține:

$$x = 5 - \sqrt{\sqrt{3 \cdot 125} - 50}.$$

Analog găsește: $z = 10 - x - y$ etc.

52. R. $\sqrt[4]{\sqrt{ac} \cdot \sqrt{bd}} = \sqrt[4]{abcd}$; a, b, c, d să fie divizori ai unei puteri de ordinul 4.

53. R. a) $x = 5 + \sqrt{7 \frac{1}{2}} + \sqrt{52 \frac{1}{2}} + \sqrt{750} \approx 16 \frac{2}{3} \approx 16,68$

b) Făcînd substituția $x^2 = z$, se obține $y = 12$ etc.

54. R. $x = 5 - \sqrt{6} + \sqrt{31}$; $y = 5 + \sqrt{6} - \sqrt{31}$

55. Sistemul a fost alcătuit pentru rezolvarea unei probleme ce i-a fost propusă lui Leonardo Pisano, de către dascălul Musc din Constantinopole.

Facem substituția $x + y + z + u + v = t$ (necunoscută auxiliară) (1)

Sistemul devine:

$$\begin{cases} x + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right)(t - x) = s \\ y + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{480}\right)(t - y) = s \\ z + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{688}\right)(t - z) = s \\ u + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{420}\right)(t - u) = s \\ v + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{27} + \frac{1}{810}\right)(t - v) = s \end{cases}$$

Din prima ecuație deducem: $x = \frac{15s - 13t}{2}$; din a doua ecuație, $y = \frac{480s - 401t}{79}$. Analog se calculează z, u și v care, introduse în relația (1), permit determinarea necunoscutei auxiliare t . Se obține, apoi, soluția x, y etc. independentă de t .

56. Formula dobînzii compuse este: $A = C(1 + r)^n$, unde C = capital inițial, A = capital final, n = numărul de ani, r = dobînda la 1 leu pe an. În condițiile problemei avem: $2C = C(1 + r)^n$, de unde deducem: $n = \frac{\log 2}{\log(1 + r)}$; dar $r = \frac{x}{100}$ (unde x reprezintă procentul, respectiv dobînda la 100 de lei pe an)

$$n = \frac{\log 2}{\log\left(1 + \frac{x}{100}\right)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log 2}{\frac{1}{x} \log\left(1 + \frac{x}{100}\right)}$$

$$n = \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log 2}{\log\left(1 + \frac{x}{100}\right) \frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log 2}{\frac{1}{100} \log e} = \frac{1}{x} \cdot \frac{100 \log 2}{\log e} = \frac{100 \cdot 0,30103}{0,43136} \approx$$

$$\approx \frac{69}{x}; \text{ deci } R. = \frac{69}{x}, \text{ în locul rezultatului lui Pacioli care era } \frac{72}{x}.$$

57. Pentru rezolvare, Leonardo pleacă de la faptul că orice număr pătrat n^2 este suma primelor n numere impare. Folosește apoi formulele stabilite de el pentru sumarea pătratelor naturale pare și impare consecutive. Rezolvă apoi în numere întregi sistemul:

$$x^2 + a = y^2$$

$$x^2 - a = z^2$$

cu condiția ca $a = 4mn(m+n)(m-n)$, unde m și n sînt numere întregi (atunci $x = m^2 + n^2$).

Alege pe m și n în mod corespunzător.

Demonstrează, apoi, că numerele de forma $4mn(m^2 - n^2)$ sînt divizibile cu 24.

Dacă, în cazul dat, a nu se împarte prin 24, atunci ecuația se înmulțește cu un pătrat întreg încît noul termen liber să fie divizibil cu 24.

Pentru $a = 5$, cel mai mic factor care satisface condițiile este 12^2 :

$$5 \cdot 12^2 = 720 = 4 \cdot 5 \cdot 4 [(5+4) \cdot (5-4)]$$

de unde rezultă: $m = 5$, $n = 4$, $m^2 + n^2 = 41$

$$\text{Deci: } 41^2 + 5 \cdot 12^2 = 49^2$$

$$41^2 - 5 \cdot 12^2 = 31^2$$

care după împărțire prin 12^2 , dă:

$$\left(3\frac{5}{12}\right)^2 + 5 = \left(4\frac{1}{12}\right)^2$$

$$\left(3\frac{5}{12}\right)^2 - 5 = \left(2\frac{7}{12}\right)^2$$

Căutați o rezolvare similară celei de la problema 47.

58. Leonardo demonstrează că x nu poate fi număr întreg (pozitiv), deoarece din

$$x + \frac{x^2}{5} + \frac{x^3}{10} = 2, \text{ rezultă } x < 2,$$

iar $1^3 + 2 \cdot 1^2 + 10 \cdot 1 = 13 < 20$. Dar x nu poate fi nici o fracție (rațională) etc.

În sfîrșit el prezintă soluția (în fracții sexagesimale): $x = 1^\circ 22^I 7^{II} 42^{III} 33^{IV} 4^V 40^{VI}$, remarcabilă prin exactitatea sa (cu $3 \cdot 10^{-11}$ mai mare decît valoarea reală a rădăcinii).

59. Inițial, Kamil efectuează o serie de transformări:

$$6 + \sqrt{\frac{x^2}{6}} + \sqrt{3x} + \sqrt{2x} = 20$$

$$\left(14 - \sqrt{\frac{x^2}{6}}\right)^2 = 196 + \frac{x^2}{6} - \sqrt{130 \frac{2}{3} x^2} = 5x + \sqrt{24x^2}$$

$$5x + \sqrt{24x^2} + \sqrt{130 \frac{2}{3} x^2} = 196 + \frac{x^2}{6}$$

$$\sqrt{24} + \sqrt{130 \frac{2}{3}} + \sqrt{154 \frac{2}{3}} + 2\sqrt{24 \cdot 130 \frac{2}{3}} = \sqrt{266 \frac{2}{3}}$$

$$x^2 + 176 = 30x + \sqrt{9600x^2}$$

De aici Abu Kamil obține pentru x valoarea

$$x = 15 + \sqrt{2400} - \sqrt{1449 + \sqrt{2160000}}$$

care echivalează cu: $x = 15 + 20\sqrt{6} - \sqrt{1449 + 600\sqrt{6}}$.

60. Se descrie un cerc de raza a ; se duce diametrul WE. Din centru se ridică o perpendiculară pe diametru, care taie cercul în S și N. În sfârșit din S, E, N și W se descriu cercuri de rază a , care se intersectează în punctele A, B, C, D, adică în vîrfurile pătratului căutat¹.

61. R. Pentru dublare: se construiește un pătrat pe diagonala lui (fig. 26): aria AEFC = 2 · aria ABCD.

În rest, e suficient să se cunoască construcția unui pătrat echivalent cu suma ariilor a două pătrate neegale: $a^2 + b^2$.

Regula lui Apastamba spune:

„Adunarea a două pătrate de măsură diferită (fig. 27): se taie cu latura celui mai mic o fișie pe cel mare. Funia (așezată) oblic pentru această fișie leagă amîndouă (pătratele)“.

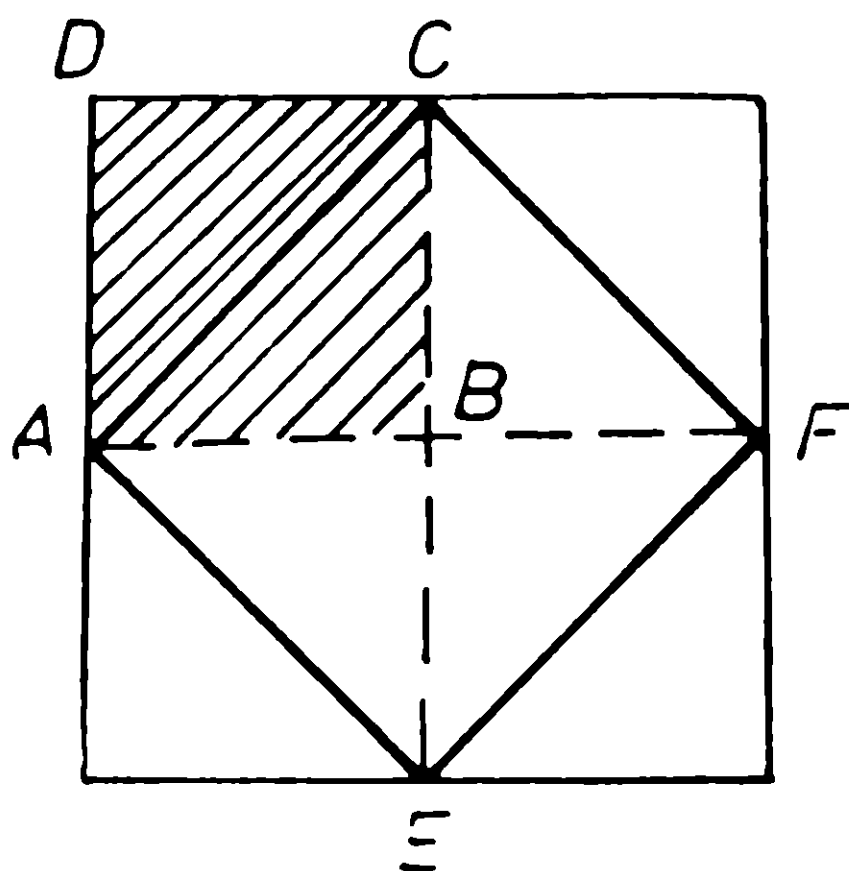


Fig. 26.

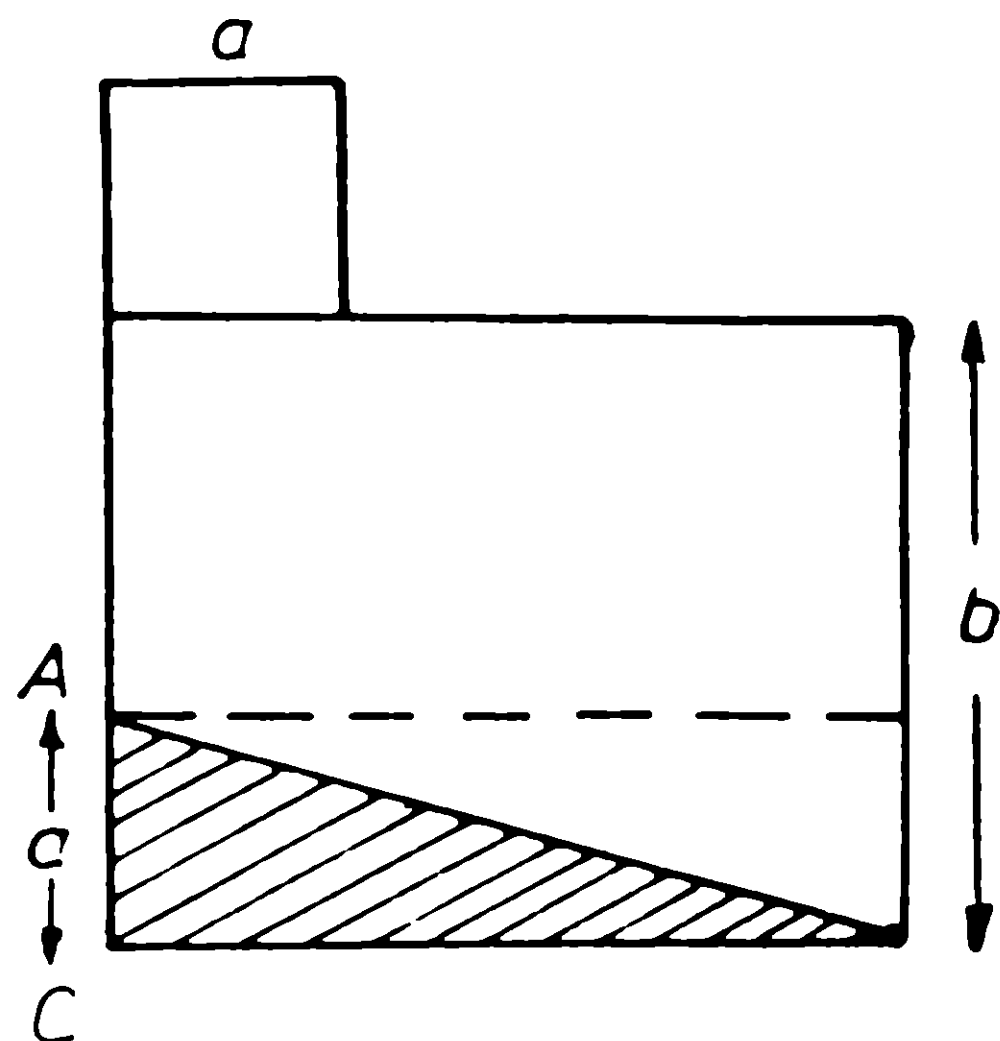


Fig. 27.

62. R. $\frac{a}{2} \left(1 + \frac{45}{60}\right)$, (paranteza reprezintă valoarea lui $\sqrt{3}$).

Prelungim fiecare latură a pătratului în același sens cu un segment x și scriem că suma ariilor Δ dr. formate este egală cu ka^2 ;

$k=1, 2, \dots$), de unde rezultă x ;

pentru $k=1$, $x_1 = \frac{a(\sqrt{3}-1)}{2}$ și $L^2_1 = (a+x_1)^2 + x^2_1$.

¹ Construcția, în partea finală, este inutil complicată. De reflectat ce l-a făcut pe matematicianul indian să procedeze astfel.

63. R. $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

64. R. Se obține ecuația: $x^2 + \sqrt{3}x^2 = \sqrt{300}$ cu soluția $x = \sqrt{\frac{3}{4} + \sqrt{300}} - \sqrt{\frac{3}{4}}$.

65. Plecînd de la egalitatea $n^2 + m^2 = 2nm + (n-m)^2$ pătratul căutat se obține dacă în jurul pătratului $(n-m)^2$ se așază 4 dreptunghiuri $\frac{nm}{2}$, respectiv de laturi $m-n$ și $\frac{mn}{2(m-n)}$ (vezi fig. 28). MNPQ este pătratul căutat. Justificare.

66. Din punctul A cu o rază egală cu latura pătratului mare, se poartă pe baza lui inferioară segmentul CD : $CD^2 = b^2 - a^2$.

67. În dreptunghiul ABCD cu laturile $AB = a$, $AD = b$, se separă pătratul ABEF = a^2 ; restul EFCD se împarte prin dreapta HG în jumătate, iar pe BF se construiește dreptunghiul BIKF egal cu EFGH, (fig. 29).

Găsiți o rezolvare mai simplă, ținînd seama că problema se reduce la construcția mediei geometrice a două numere.

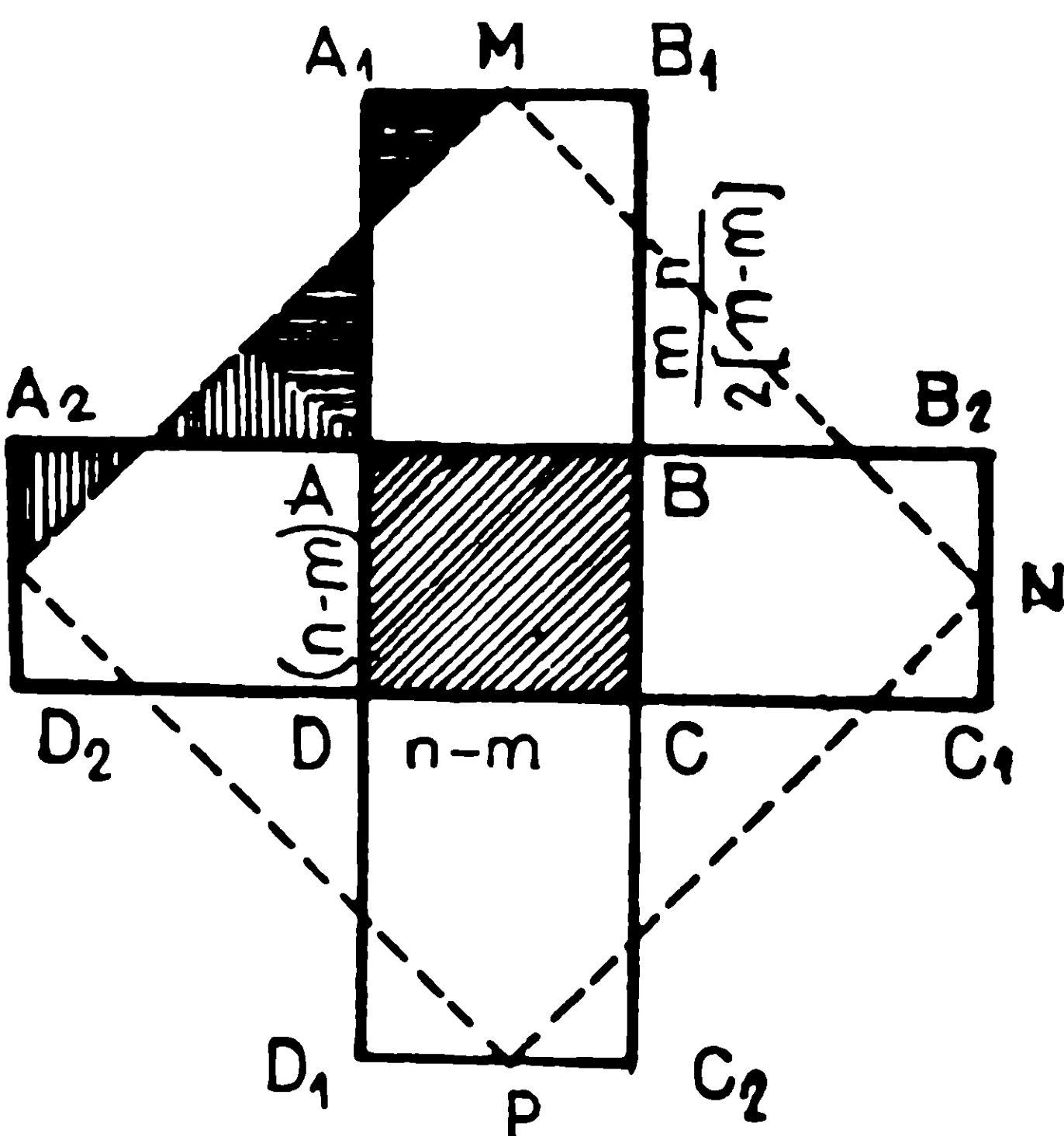


Fig. 28.

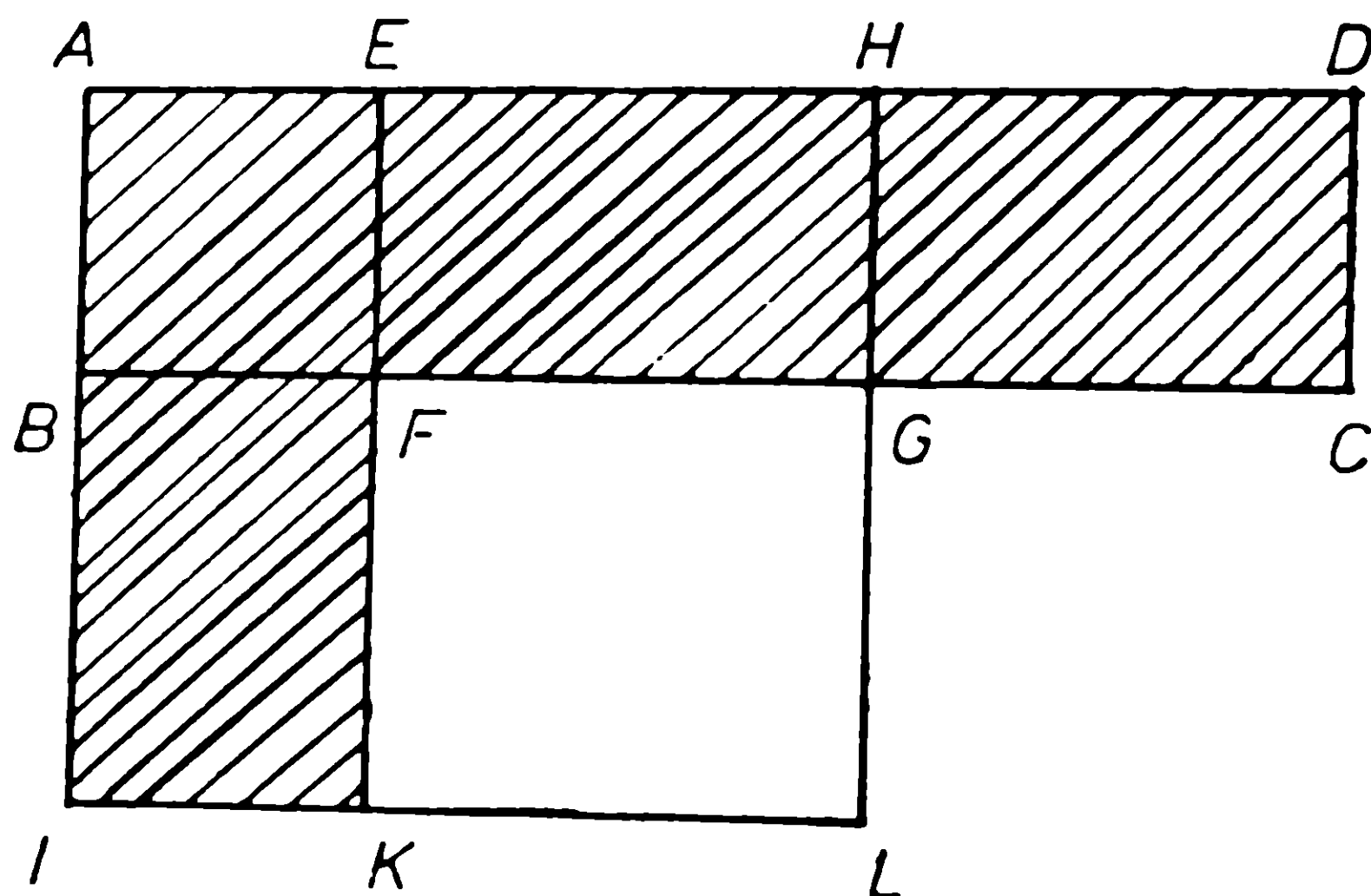


Fig. 29.

Astfel dreptunghiul ABCD se transformă în gnomonul AIKFGHA, egal cu diferența celor două pătrate date AILH și FKLK și totul se reduce la construcția de la problema precedentă.

Algebric, relația se prezintă astfel:

$$\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 = ab.$$

68. Ciju adoptă ca necunoscută principală suma cerută: $v = x + \sqrt{x^2 + y^2}$ (în notația noastră) și după o serie de transformări algebrice care cer multă îndemînare ajunge la ecuația:

$$-3\,600 - 3\,706\,V - 71\,V^2 + 34\,V^3 - V^4 = 0$$

și găsește rădăcina 18. Apoi Ciju rezolvă separat problema în care se caută suma dintre cateta mare și ipotenuză și ajunge din nou la aceeași ecuație.

Noi am fi rezolvat sistemul:

$$xy = 60$$

$$x + y = 17 \text{ și cunoscînd } x = 5, y = 12$$

am fi calculat $\sqrt{x^2 + y^2} = 13$, iar suma căutată ar fi fost $5 + 13 = 18$.

69. Rădăcina egală cu 4 este ușor de descoperit, aducînd ecuația la forma: $x^3 + x = 4y^2 + 4$ și simplificînd cu $x^2 + 1$.

70. Rezolvînd ecuația se găsește 8 ca parte întreagă a rădăcinii. Apoi, Ciju face substituția $x = y + 8$, de unde rezultă:

$$576\,y^4 + 15\,792\,y^3 + 159\,553\,y^2 + 704\,392\,y - 545\,300 = 0$$

Apoi el notează $y = \frac{z}{576}$ și obține:

$$z^4 + 15\,792\,z^3 + 91\,902\,528\,z^2 + 233\,700\,360\,192\,z - 104\,208\,452\,812\,800 = 0$$

Se găsește $z = 384$, de unde rezultă:

$y = \frac{384}{576} = \frac{2}{3}$ și $x = 8\frac{2}{3}$. (Pînă în secolul al XVI-lea, algebriștii chinezi se limitează la găsirea unei singure rădăcini pozitive a ecuației.)

71. Autorul exprimă verbal regula de formare a ecuației:

$$x^3 + \frac{1}{2} \cdot 36\frac{9}{10}x^2 = \frac{\left(706\frac{1}{50}\right)^2}{2 \cdot 36\frac{9}{10}} \text{ și adaugă laconic:}$$

„Efectuați operația de găsire a rădăcinii conform extragerii rădăcinii (cubice)“. Rezultatul va da prima latură.

Adăugînd la aceasta prisosul, obținem ipotenuza. Împărțiți produsul cu prima latură, cîtul este a doua latură.

Răspunsul:

$$x = 14\frac{7}{20}; y = 49\frac{1}{5}; z = \sqrt{x^2 + y^2} = 51\frac{1}{4}$$

72. Dacă o rotim pe un plan, atunci la o rotație completă, urma ei dreptunghiulară va avea o arie egală cu aria roții însăși (deci și a cercului dat):

$$S = 2\pi r \cdot \frac{r}{2} = \pi r^2, \text{ deci egală cu aria cercului dat.}$$

73 În notații moderne avem:

$$a^2 = h^2 + \frac{b^2}{4}, \quad 2S = bh \text{ astfel încît:}$$

$$a^2 - 2S = \left(h - \frac{b}{2}\right)^2, \quad \frac{a^2 - 2S}{4} = \left(\frac{h}{2} - \frac{b}{4}\right)^2 \text{ și}$$

$$\frac{a^2 - 2S}{4} + S = \frac{a^2 + 2S}{4} = \left(\frac{h}{2} + \frac{b}{4}\right)^2$$

$$\frac{h}{2} - \frac{b}{4} = \frac{\sqrt{a^2 - 2S}}{2}$$

$$\frac{b}{2} + \frac{b}{4} = \frac{\sqrt{a^2 + 2S}}{2} \text{ de unde rezultă } \frac{h}{2} \text{ și } \frac{b}{4} \text{ etc.}$$

74. R. $31 + \frac{1}{4}$:

75. În rezolvarea noastră avem:

$$\frac{MC}{b} = \frac{m}{a}; \quad MC = \frac{bm}{a}$$

$$\frac{MN}{c} = \frac{m}{a}; \quad MN = \frac{cm}{a}$$

$$NC \cdot NB = p$$

$$MC \cdot MA = q$$

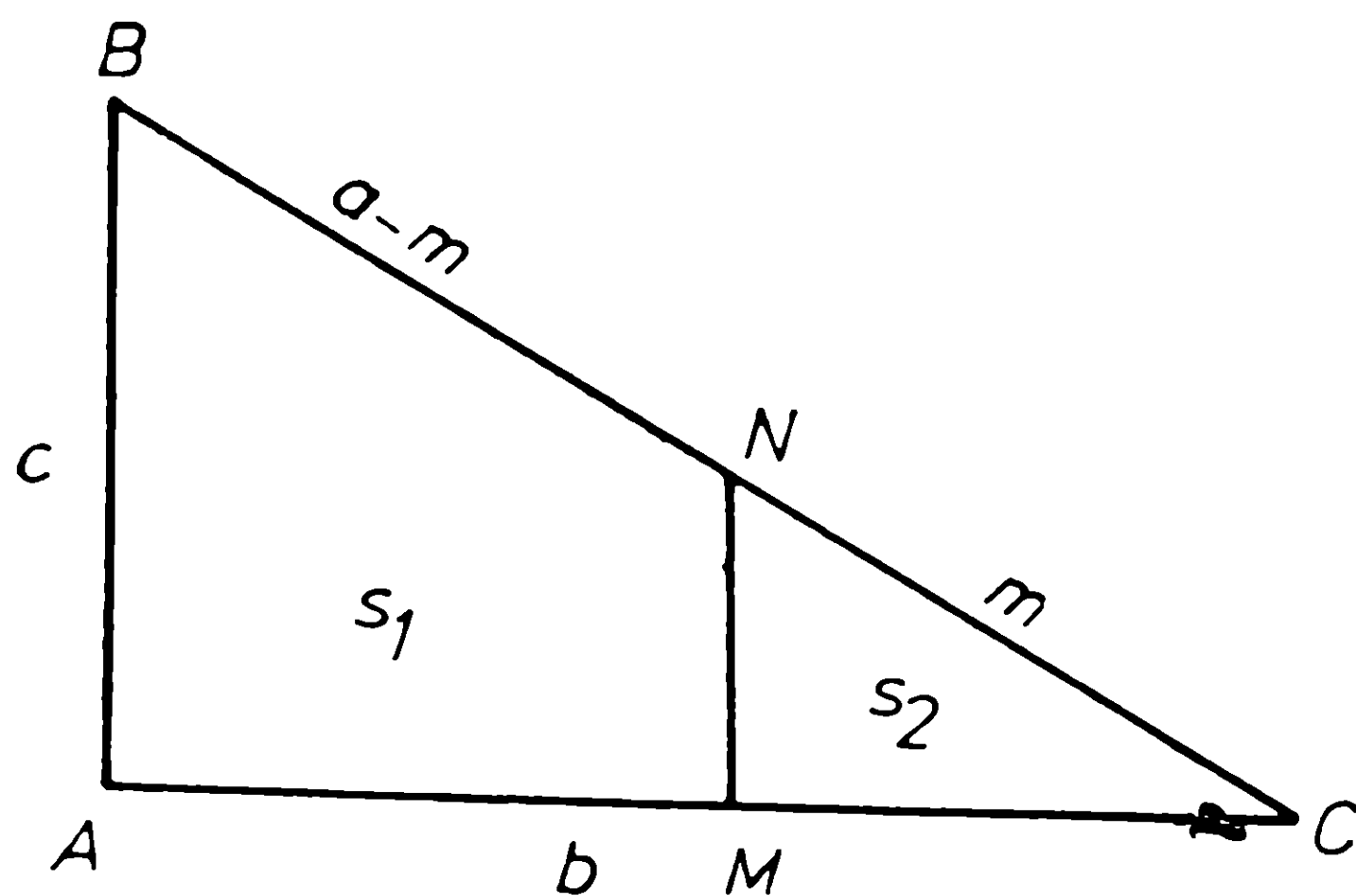


Fig. 30.

$s_1 - s_2 = r$ unde p, q, r, m sînt

date: $m(a - m) = p$

$$\frac{bm}{a} \left(b - \frac{bm}{a}\right) = q;$$

$$\frac{bcm^2}{2a^2} \cdot \frac{\left(\frac{cm}{a} + c\right) \cdot \left(b - \frac{bm}{a}\right)}{2} = r$$

Rezolvînd acest sistem, se determină a, b, c , apoi rezultă împărțirea cerută.

76. Punctul căutat este acela unde circumferința ce trece prin capetele prăjinii este tangentă la pardoseală, — respectiv un cerc, ale cărui puncte îndeplinesc această condiție (fig. 31).

$$\text{măs. } \widehat{AS_1B} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{CD}}{2} < \frac{\widehat{AB}}{2} = \text{măs. } ASB.$$

A diagram showing a sphere of radius r resting on a horizontal surface. The center of the sphere is labeled O . A point A is on the upper right surface of the sphere. A vertical line segment connects O to A . A point B is on the surface of the sphere, and a vertical line segment connects O to B . A point C is on the horizontal surface, and a vertical line segment connects O to C . A point T is on the horizontal surface, and a vertical line segment connects O to T . A point T' is on the horizontal surface, and a vertical line segment connects O to T' . The horizontal surface is represented by a thick line. The sphere is represented by a circle.

a) $\hat{B} = 2C$; $\hat{A \hat{O} E} = A + C = 2C + C = 3C$

$$\text{b) } \widehat{BF} = \widehat{AE}, \text{ deci } \widehat{BD} = \frac{1}{3} \widehat{BF}.$$

$$ax - x^2 = b^2$$

A diagram of a rectangle divided into two parts, J and F, by a vertical line segment EF. The left part, J, is shaded with diagonal lines. The right part, F, is unshaded. The height of the rectangle is labeled x on the left side. The width of the shaded part J is labeled x at the bottom. The vertices are labeled J (top-left), F (top-right of shaded part), H (top-right), A (bottom-left), E (bottom-right of shaded part), and B (bottom-right).

$$\frac{\text{Aria AFB}}{\text{Aria AED}} = \frac{\text{AB}^2}{\text{AD}^2} = \frac{1}{(\sqrt{3})^2} = \frac{1}{3}$$

80. a) $BF = l_3$ Deci $B = 30^\circ$

$$\hat{F}CG = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) + \hat{G}BH$$

In $\triangle BDG$ dr.

$$DG = \frac{BG}{2} \text{ (opusă } \nless 30^\circ)$$

$$BG^2 = \frac{BG^2}{4} + \frac{R^2}{4}$$

$$3BG^2=R^2; \quad \overline{BG}=\frac{R}{\sqrt{3}}$$

$$\Delta CFG = \Delta BGH \rightarrow GF = GH$$

$$GF = \sqrt{CF^2 + CG^2} = \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{3}} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\text{Aria GF}}{\text{Aria BC}} = \frac{\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2}{R^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{\text{Aria GH}}{\text{Aria BC}} = \frac{\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}\right)^2}{R^2} = \frac{4}{3} \quad (\text{vezi fig. 2, pag. 31})$$

b) $\text{Aria GF} = 1 \frac{1}{3} \text{ aria BC} = \text{Aria GH}$

c) $\text{Aria lunulei FCBH} = \text{aria FCBHG}$, deoarece:

$$2A \text{ sg FG} = 3A \text{ sg BC}$$

$$2 \cdot 1 \frac{1}{3} s = 3 \cdot 1 s \rightarrow 2 \cdot \frac{3}{2} s = 3 s$$

81.

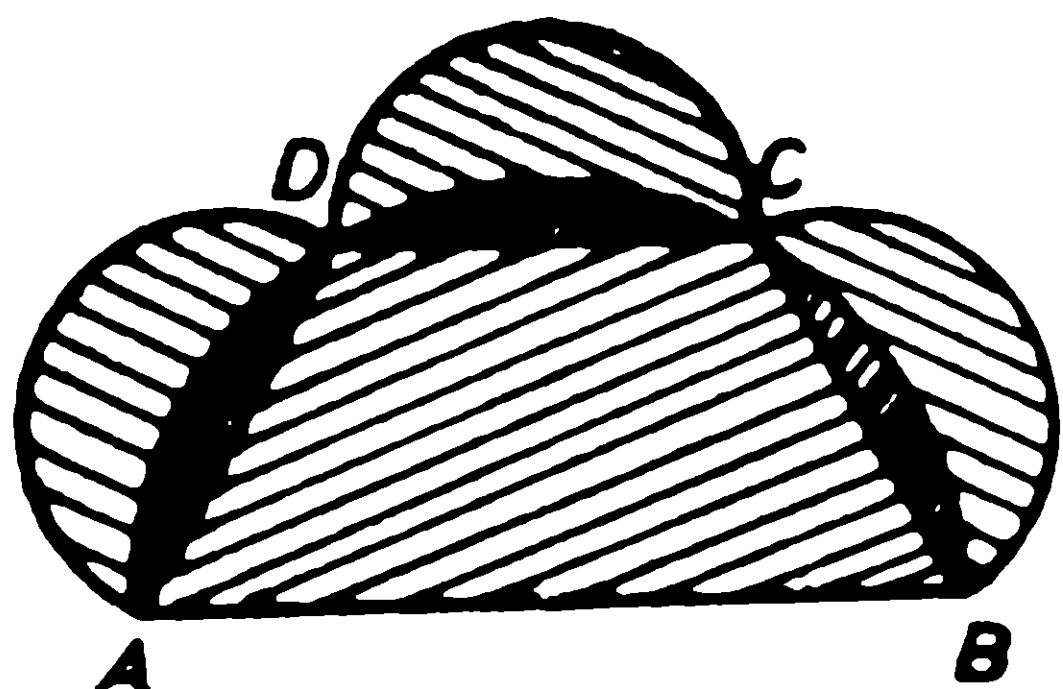


Fig. 34.

$$\text{Aria trapezului: } \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Aria a 3 segmente: } \frac{\pi R^2}{2} - \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} = -\frac{R^2}{4}(2\pi - 3\sqrt{3})$$

$$\text{Aria semicercului: } \frac{1}{2}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{8}$$

$$\text{Aria a 3 lunule: } \frac{3\pi R^2}{8} - \frac{R^2}{4}(2\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi R^2}{8}$$

$$\left(\frac{3R^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi R^2}{8}\right) + \frac{\pi R^2}{8} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{q.e.d.}$$

82. R. $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$ atunci $\frac{a^2}{x^2} = \frac{a}{2x}$; $x = a^2\sqrt{2}$

Exceptînd condiția impusă, rezultă, mai direct, $x^3 = 2a^3$; $x = a^3\sqrt{2}$.

83.

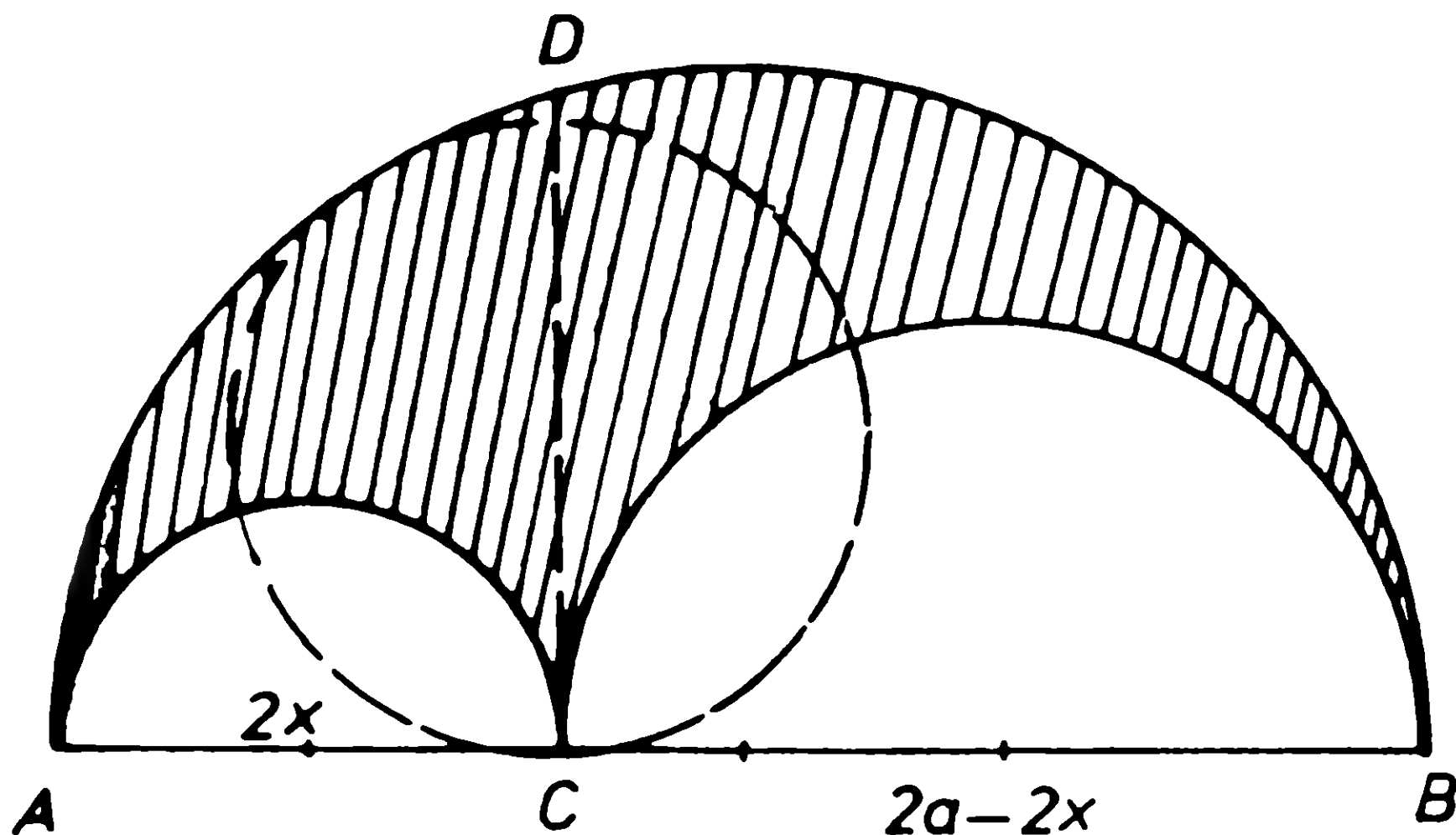


Fig. 35.

$$\Lambda a = \frac{\pi a^2}{2} - \frac{\pi x^2}{2} + \frac{\pi(a-x)^2}{2} = \frac{\pi}{2}(a^2 - x^2 - a^2 + 2ax - x^2) = \frac{\pi}{2}(2ax - 2x^2) = \pi x(a-x)$$

$$CD^2 = 2x(2a - 2x) = 4x(a - x)$$

$$A_c = \pi \cdot \left(\frac{CD}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} CD^2 = \frac{\pi}{4} \cdot 4x(a - x). \text{ Deci: } A_a = A_c.$$

86. R. $(2 \cdot 10 - 8)^2 = 144$; $144 + 52 = 196$ etc. $N = 28$

87. Într-o zi fiecare fîntînă ar umple respectiv:

$$\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4} \text{ din capacitatea bazinului.}$$

Într-o zi toate patru ar umple:

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{50}{24} \text{ bazine}$$

$$\frac{50}{24} \dots 1 \text{ zi}$$

$$1 \text{ bazin} \dots x = \frac{24}{50} = \frac{12}{25} \text{ zile.}$$

88. a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}; \quad 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$

b) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12} + \frac{1}{18} = \frac{5}{36}; \quad \frac{1}{6} - \frac{5}{36} = \frac{1}{36}.$

c) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{36} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{36} = \frac{1}{72} + \frac{1}{108} = \frac{3+2}{216} = \frac{5}{216}; \quad \frac{1}{36} - \frac{5}{216} = \frac{1}{216}.$

R. $\frac{1}{216} = 11$ dahecani; suma: $216 \cdot 11 = 2\,376$ dah.

89. Răspuns (în sistemul modern de scriere):

primul a primit $1\frac{9}{11}$, al doilea $3\frac{7}{11}$ ș.a.m.d.

Anania dă răspunsul în fracții egiptene:

$$1 : 1 \frac{1}{2} \frac{1}{5} \frac{1}{10} \frac{1}{55} \text{ adică } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{55};$$

al șaptelea: $12 \frac{1}{2} \frac{1}{10} \frac{1}{22} \frac{1}{30} \frac{1}{33} \frac{1}{55}$

90. R. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$ bazin; $1 : \frac{11}{6} = \frac{6}{11}$ ore.

91. Numărul bărbaților care învățau în școala lui Pitagora: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{7} = \frac{25}{28}$ din numărul total al elevilor.

Numărul femeilor $\frac{28}{28} - \frac{25}{28} = \frac{3}{28}$ reprezintă 3 femei; deci $\frac{1}{28}$ reprezintă 1 elev. Deci numărul total al elevilor era 28.

R. 25.

92. a) Soluție dată de juristul roman Salvius Iulianus.

Dacă vom considera că esența voinței testatorului constă în raportul dintre cota mamei (m) față de cota fiului (s) și de cea a fiicei (t), atunci din textul problemei rezultă că fiica trebuia să primească din moștenire o cotă de două ori mai mică decât mama, iar fiul o cotă de două ori mai mare decât mama.

Prin urmare, moștenirea trebuie împărțită în 7 părți egale, din care mama va primi două părți, fiul — patru părți, iar fiica — o parte:

$$m : s : t = 2 : 4 : 1 \quad \text{sau} \quad \frac{m}{2} = \frac{s}{4} = \frac{t}{1}$$

Deci mama va primi $\frac{2}{7}$ din avere.

b) Altă soluție: Voința testatorului ar mai putea fi interpretată în sensul că dorea să-i lase mamei cel puțin $\frac{1}{3}$ din avere.

În acest caz, se împarte restul de $\frac{2}{3}$ din moștenire între fiu și fiică raportul de 4 : 1. Atunci fiul va primi $\frac{2}{15} \cdot 4 = \frac{8}{15}$, iar fiica $\frac{2}{15} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{15}$ din întreaga moștenire.

93. Folosind metoda „mersului invers“, avem succesiv:

$$24 : 2 = 12 \text{ bani}$$

$$12 + 24 = 36 \text{ bani}$$

$$36 : 2 = 18 \text{ bani}$$

$$18 + 24 = 42 \text{ bani a avut după prima trecere;}$$

$$42 : 2 = 21 \text{ bani a avut la început.}$$

94. a) Judecătorul le „dăruiește“ o cămilă (pentru a obține un număr divizibil cu 3 și 5); $15 \cdot \frac{1}{3} = 5$; $15 \cdot \frac{3}{5} = 9$, iar $5 + 9 = 14$.

b) Analog.

c) Judecătorul le mai „dăruiește“ două cămile.

d) Imposibil, suma celor trei fracții este mai mare decât 1.

95. Dacă la mărul rămas turcului adăugăm cele 2 mere date celui de-al 3-lea paznic, obținem 3 mere, care reprezintă jumătate din numărul total al merelor avute în coș după ce a trecut de al doilea paznic, adică 6 mere. Continuând raționamentul după metoda retrogradă, găsim că turcul trebuia să fure 36 mere.

$$\mathbf{96.} \quad \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x; \quad X = 84 \text{ ani.}$$

97. a) Rezolvare algebrică. Fie x numărul de cămile:

$$\mathbf{A.} \quad 1 + \frac{x-1}{5} = \frac{x+4}{5} \text{ primește primul fiu; rest: } \frac{4(x-1)}{5}$$

$$\mathbf{B.} \quad 2 + \frac{4(x-1)}{5} - 2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{36+4x}{25} \text{ primește al doilea fiu etc.}$$

Cum $A=B$, rezultă ecuația: $\frac{x+4}{5} = \frac{36+4x}{25}$ cu soluția $x=16$ cămile.

Problema se poate rezolva și grafic. Dăm o astfel de rezolvare pentru cazul când fiul cel mare primește o cămilă și $\frac{1}{7}$ din rest etc.

Considerăm (fig. 36) un pătrat cu latura de 6 cm^1 , de exemplu. Tăiem din el o fișie ABMN lată de 1 cm (hașurată în figură) și o așezăm la dreapta părții rămase.

Acum aceeași fișie reprezintă o unitate și $\frac{1}{7}$ din rest.

Figura *b* reprezintă dreptunghiul rămas. Tăiem din el din nou o fișie MPQN lată de 1 cm și o așezăm la dreapta părții rămase; ea reprezintă două unități și $\frac{1}{7}$ din rest.

Figurile *c*, *d* și *e* arată că fișia a 3-a reprezintă 3 unități și $\frac{1}{7}$ din rest, fișia a 4-a reprezintă 4 unități din rest, iar ultima fișie, a 6-a, reprezintă 6 unități și nici un rest.

Dacă arabul ar fi avut $6 \cdot 6 = 36$ cămile, ar fi prevăzut în testament ca primul fiu să ia o cămilă și $\frac{1}{7}$ din rest, al doilea să ia, apoi, două cămile și $\frac{1}{7}$ din rest, al treilea să ia trei cămile și $\frac{1}{7}$ din rest ș.a.m.d. La 6^2 cămile apare fracția $\frac{1}{7}$ al cărei numitor este cu 1 mai mare ca 6.

b) În primul caz:

Primul fiu să ia o cămilă și $\frac{1}{4}$ din rest, al doilea să ia 2 cămile și $\frac{1}{4}$ din rest iar al treilea să ia restul.

În al doilea caz:

Primul fiu să ia o cămilă și $\frac{1}{6}$ din rest etc. (când sînt 5 moștenitori apare mereu fracția $\frac{1}{6}$).

În ultimul caz: Primul să ia 4 cămile și $\frac{1}{9}$ din rest, al doilea să ia 5 cămile și $\frac{1}{9}$ din rest ș.a.m.d.

98. Cantitatea de cereale primită de cei 5 oameni formează o progresie aritmetică crescătoare. Notînd primul său termen cu x , iar rația cu y , rezultă că părțile primite vor fi respectiv:

$$\div x; x+y; x+2y; x+3y; x+4y.$$

Ținînd seama de datele problemei formăm ecuațiile:

$$x+(x+y)+(x+2y)+(x+3y)+(x+4y)=100$$

$$7(x+(x+y))=(x+2y)+(x+3y)+(x+4y).$$

Ajungem apoi la sistemul:

$$x+2y=20$$

$$11x=2y, \text{ a cărui soluție este: } x=1\frac{2}{3}; y=9\frac{1}{6} \text{ etc.}$$

¹ Numitorul fracției minus unitatea.

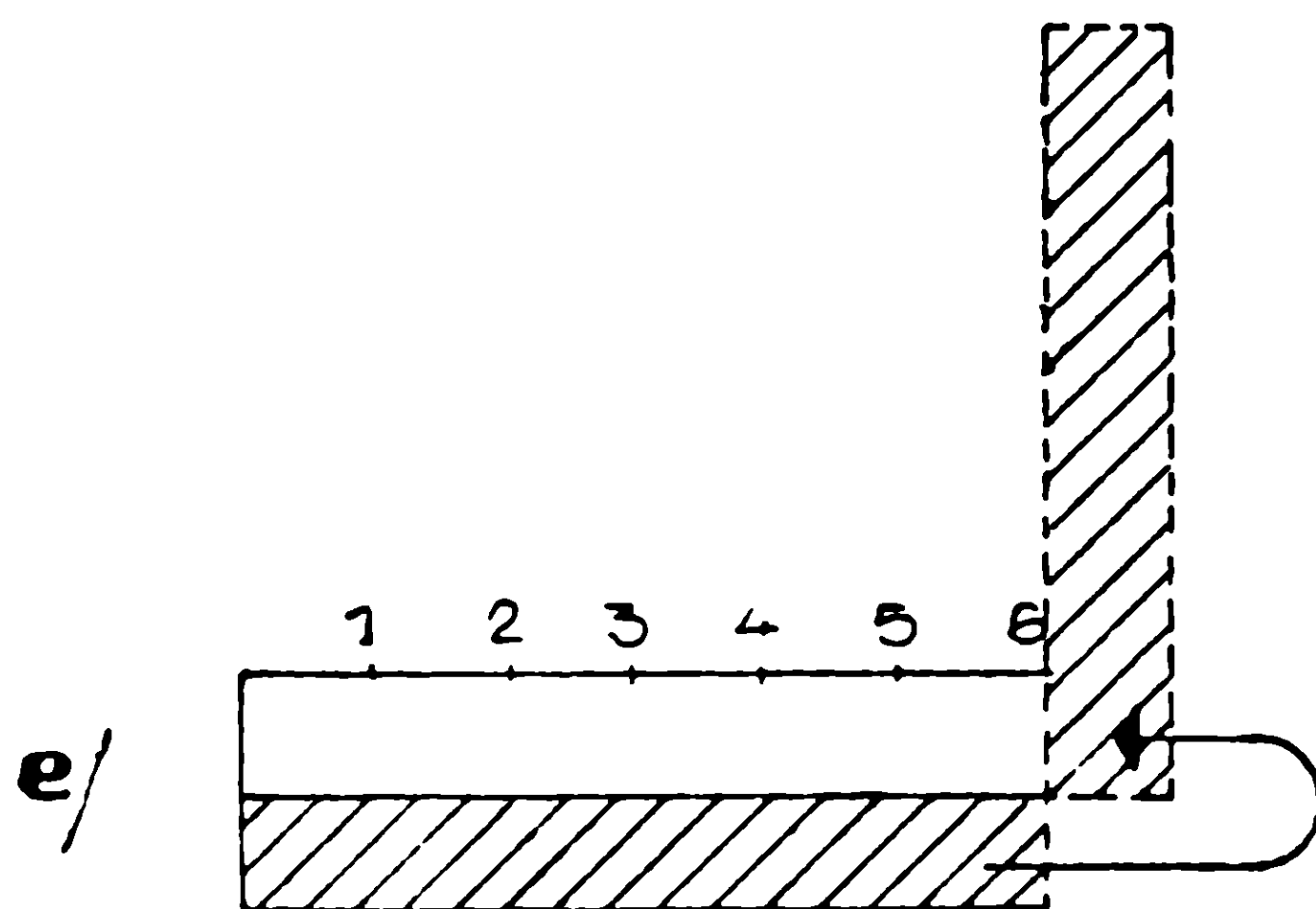
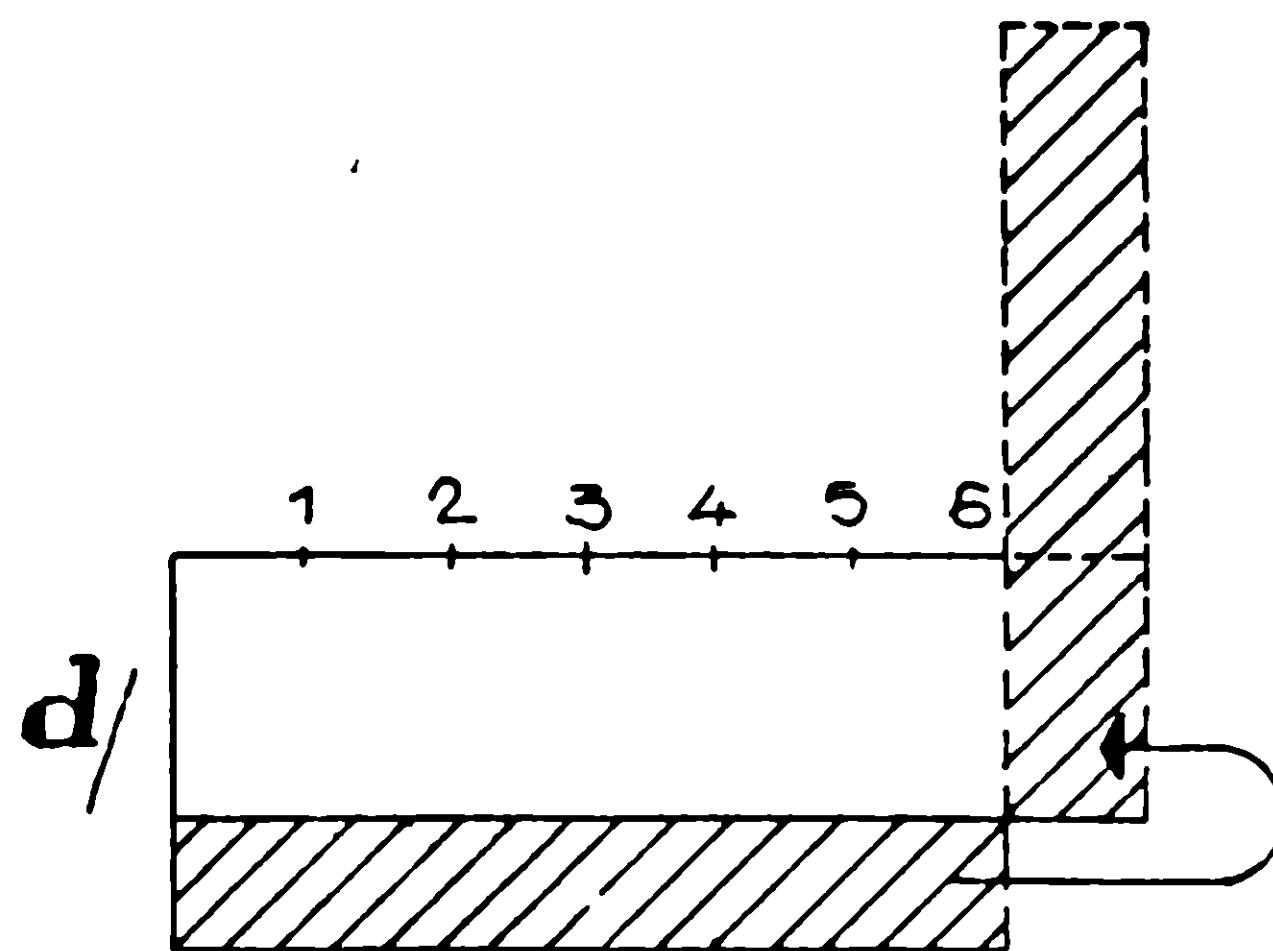
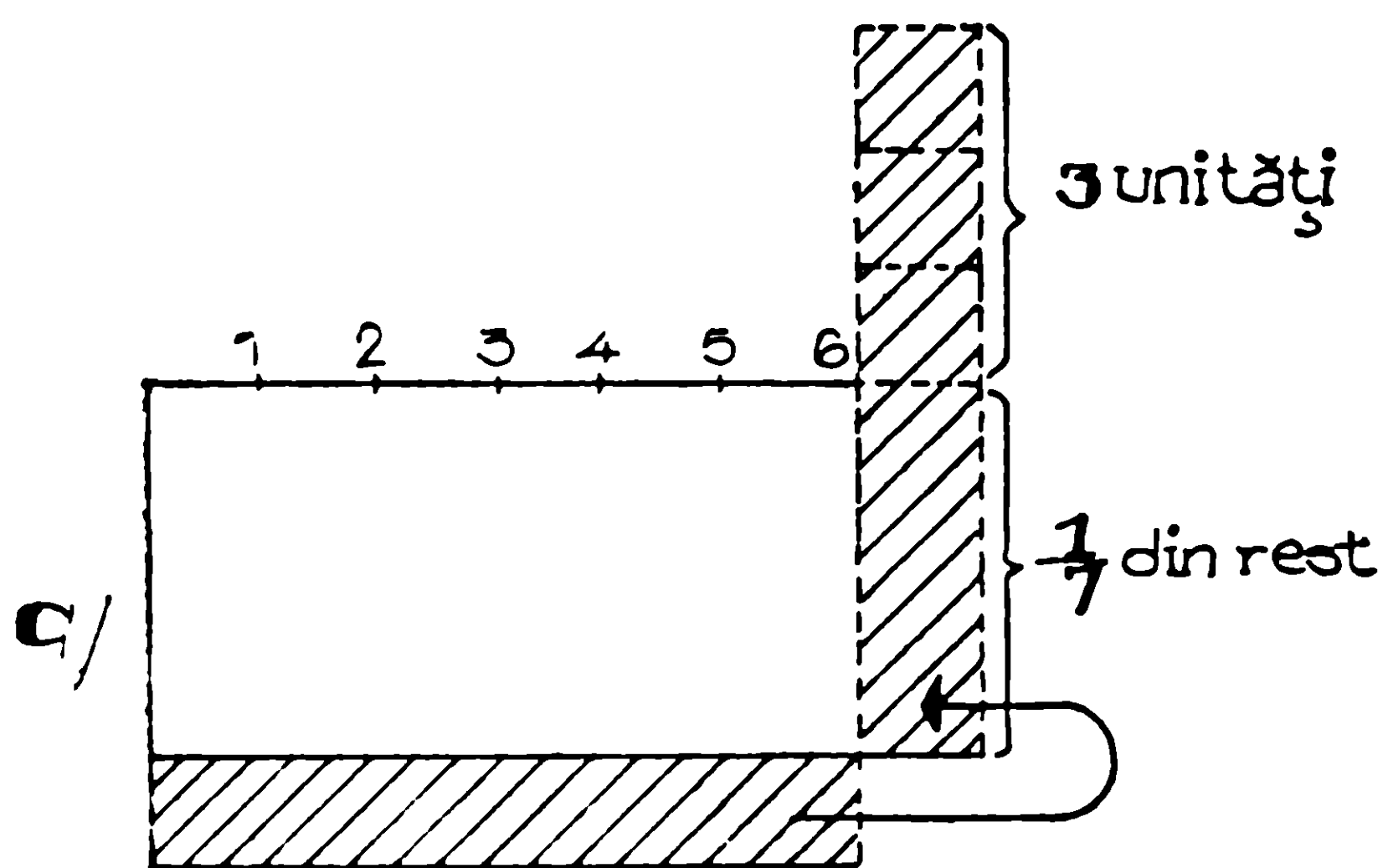
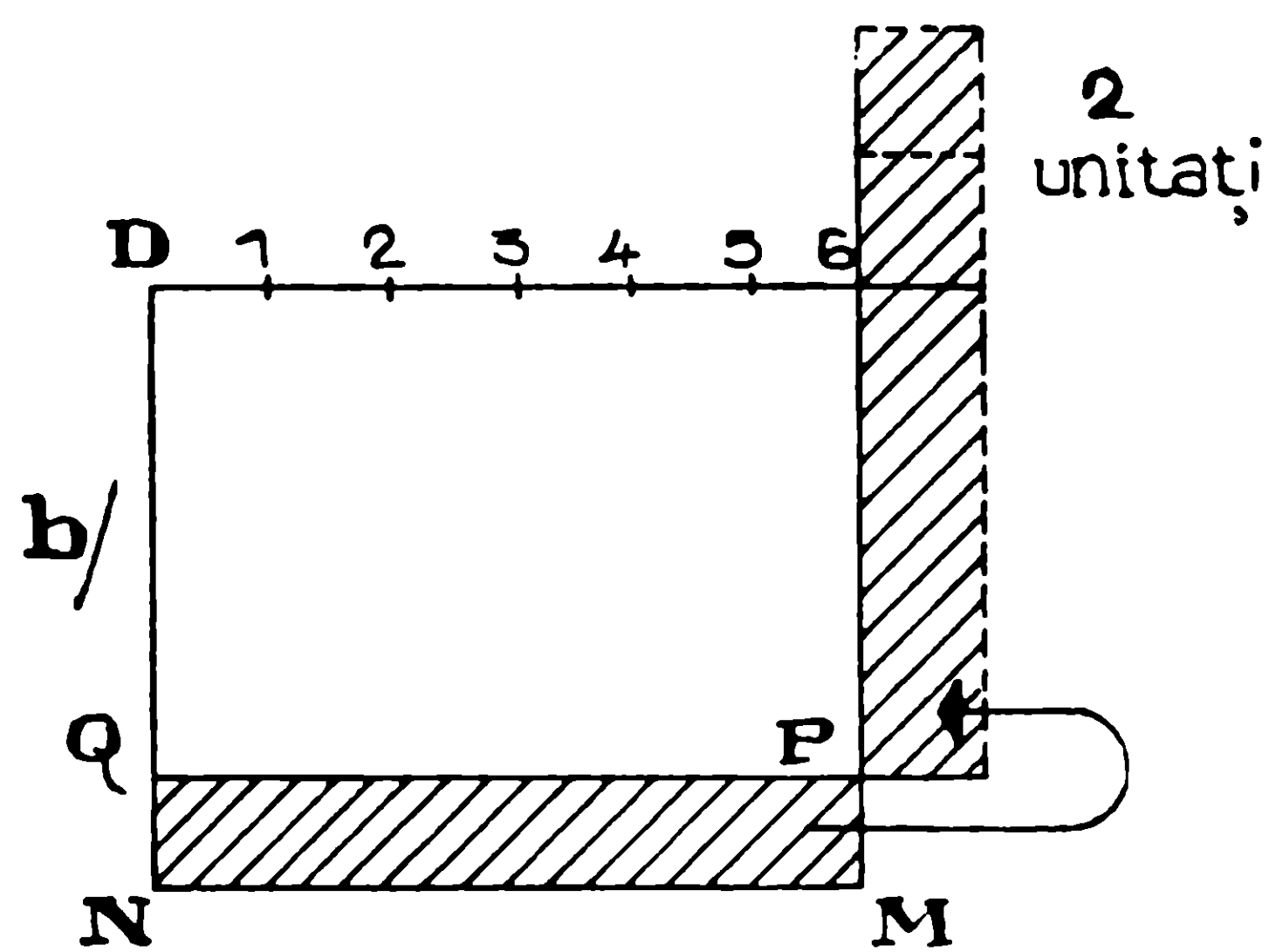
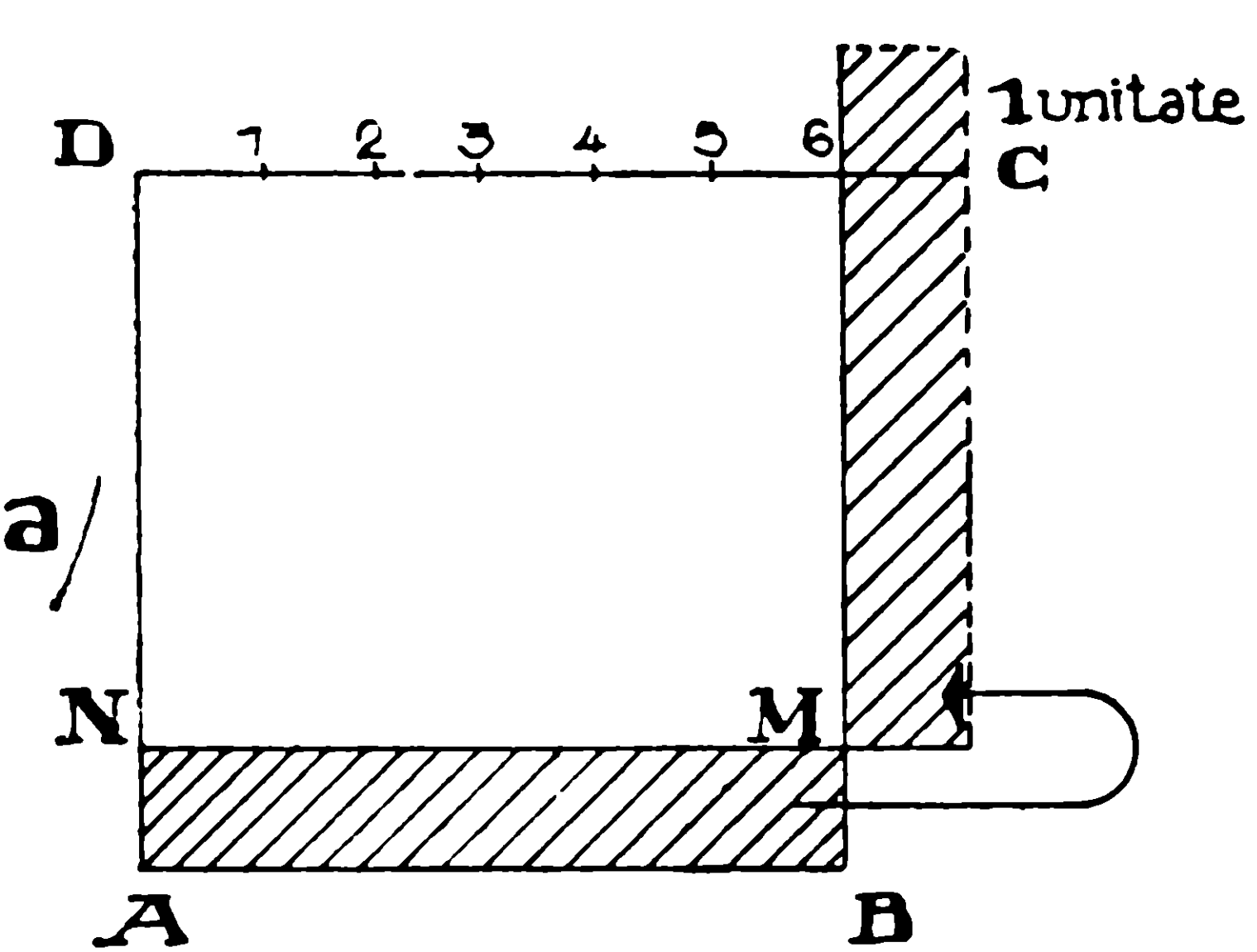


Fig. 36.

99. Notăm cu x timpul în care Bacchus bea singur vinul din amforă; cu y , respectiv, timpul lui Sileniu.

$$\frac{3y}{10} = \frac{x}{5}; \quad \frac{x+y-2}{2} = \frac{x}{5} = \frac{7y}{10}$$

Sileniu ar fi golit amfora în 4 ore și Bacchus în 6 ore.

100. R. $\frac{x}{5} + \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3} - \frac{x}{5}\right) \cdot 3 + 1 = x$; $x = 15$ albine.

101. R. $50^2 + x^2 = 40^2 + (60 - x)^2$; $x = 22 \frac{1}{2}$ coți; $d - x = 37 \frac{1}{2}$ coți.

102. Ecuația este: $\sqrt{\frac{x}{2}} + \frac{8}{9}x + 2 = x$; rezolvînd-o obținem $x = 72$ albine

103. $x^2 = 3^2 + 4^2$; $x = 5$

$OA = 5 + 3 = 8$ unități de lungime.

104. Numărul maimuțelor: x ; ecuația:

$$\left(\frac{x}{5} - 3\right)^2 = x - 1; \quad x^2 - 55x + 250 = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{55 \pm \sqrt{2025}}{2}; \quad x_1 = 50 \text{ maimuțe},$$

$x_2 = 5$ maimuțe (nu convine).

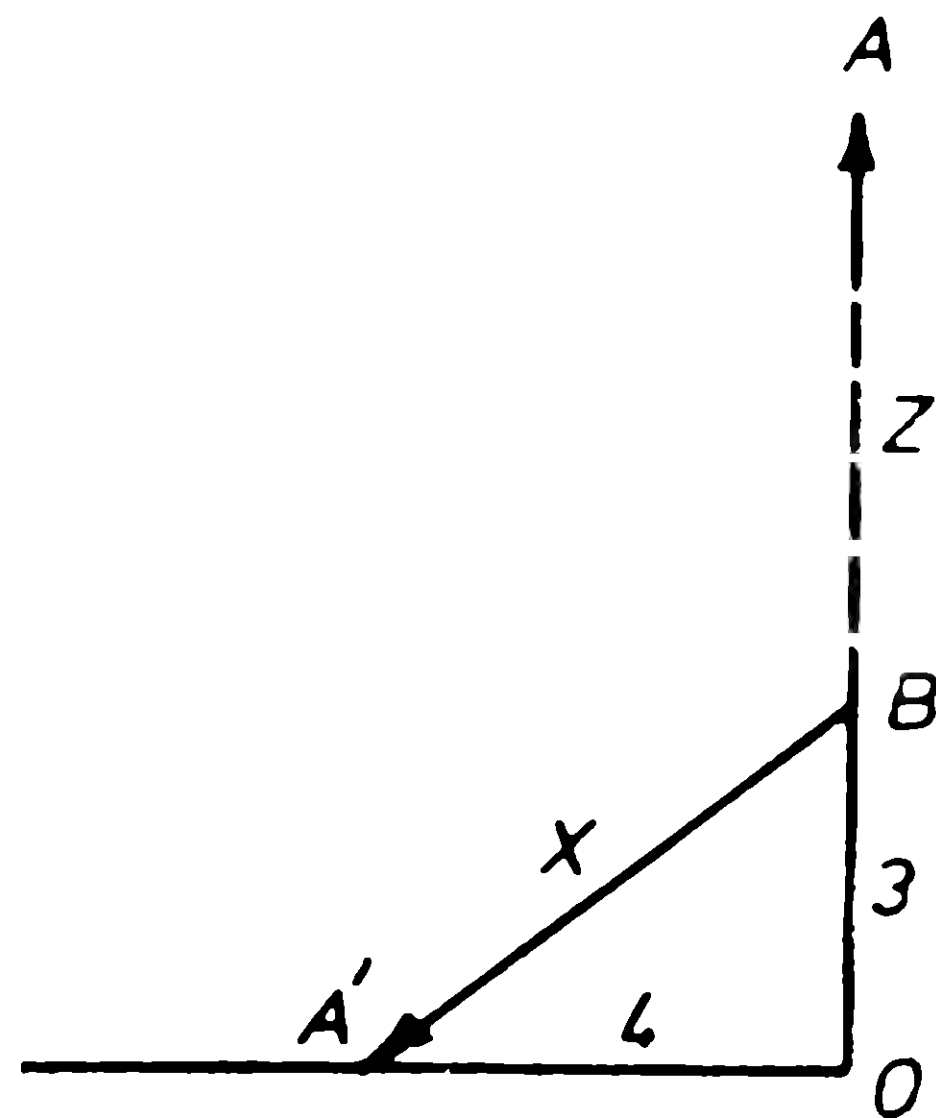


Fig. 37.

105. $AC = x$; aplicînd teorema lui Pitagora în triunghiul ACB^1 , găsim:

$$(x+4)^2 = x^2 + 16^2$$

$$8x = 240 \text{ pași}; \quad x = 30 \text{ pași}$$

106. Notînd cu x cantitatea de aur din amestec și cu y cantitatea de argint, scriem ecuațiile:

$$\begin{cases} x + y = 12 \cdot 32 \\ 19x + 28 \frac{1}{2}y = (x + y) \cdot 21 \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 384 \\ -2 \frac{1}{4}x + 7 \frac{1}{4}y = 0 \end{cases}$$

$$-\frac{9}{4}x + \frac{29}{4}y = 0$$

$$\frac{9}{4}x + \frac{9}{4}y = \frac{3456}{4}$$

$$38y = 3456$$

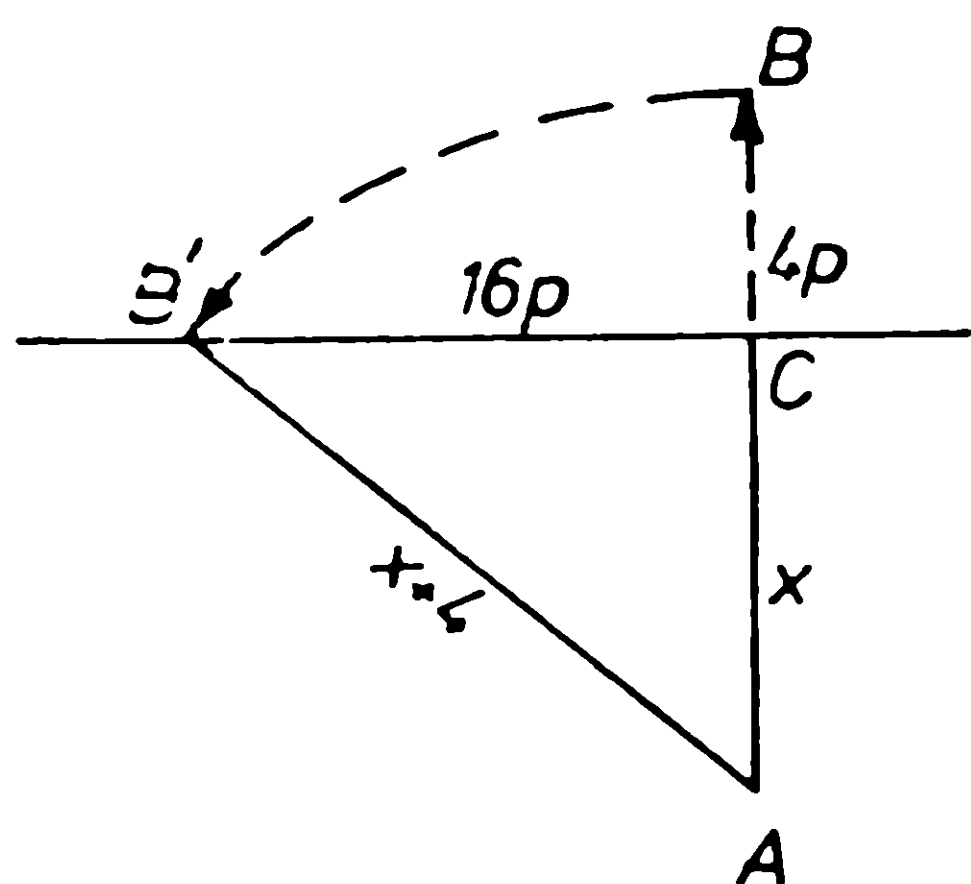


Fig. 38.

$$y = \frac{3456}{38} = 90 \frac{18}{19} \text{ loturi (2 funturi și } 26 \frac{18}{19} \text{ loturi);}$$

$$x = 384 - 90 \frac{18}{19} = 293 \frac{1}{19} \text{ loturi aur curat;}$$

$$x = \frac{293 \frac{1}{19}}{32} = 9 \text{ funturi și } 5 \frac{1}{19} \text{ loturi aur curat.}$$

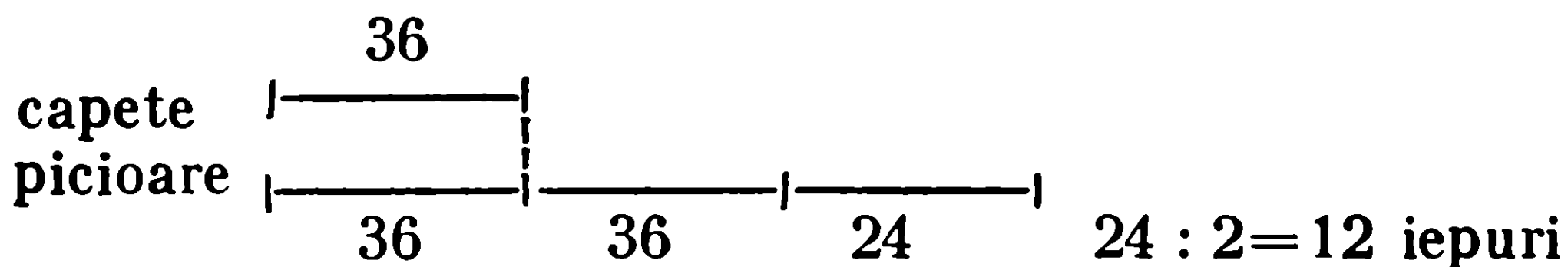
$$107. \text{ a) } x + y = 36$$

$$x = 14 \text{ iepuri}$$

$$4x + 2y = 100$$

$$y = 22 \text{ fazani}$$

b) Soluție figurativă



108. Să admitem că x este numărul de scoateri de orez cu lopata; y este numărul de scoateri de orez cu papucul; z este numărul de scoateri de orez cu ligheanul.

Vom obține sistemul de ecuații:

$$19x + 1 = 17y + 14 = 12z + 1$$

Din acest sistem avem:

$$19x = 12z; \quad x = \frac{12z}{19}$$

Întrucât x, y, z sînt în fond numere întregi, putem presupune că $z = 19t$.

Atunci obținem ecuația nedeterminată:

$$17y + 13 = 228t.$$

Luînd pentru t valoarea numerică minimă în cazul căreia y va fi întreg, adică $t = 14$, se obține: $x = 168$; $y = 187$; $z = 266$.

Primul hoț a furat 3 „și” 1 „tao” 9 „șingi” 2 „go”;

al doilea hoț a furat 3 „și” 1 „tao” 7 „șingi” 9 „go”;

al treilea hoț a furat 3 „și” 1 „tao” 9 „șingi” 2 „go”.

$$109. \text{ În } \triangle PBD \text{ dr., } \operatorname{tg} \hat{P} = \frac{BD}{PB} =$$

$$= \frac{900}{300 + 2R} \quad (1)$$

$$\text{În } \triangle POC \text{ dr., } \operatorname{tg} \hat{P} = \frac{R}{PC} = \frac{R}{10\sqrt{900 + 6R}} \quad (2)$$

Egalînd (1) cu (2) rezultă ecuația din care calculăm pe R :

$R^3 + 150R^2 - 1215 \cdot 10^7 = 0$, a cărei soluție acceptabilă este $R \cong 2025$ pași.

Deci profilul transversal este de cca 4 050 pași.
Încercați o rezolvare în ipoteza că deplasarea se face pe arcul BC.

110. *Rezolvare.* În notarea modernă, rezultă sistemul:

$$3x + 2y + z = 39$$

$$2x + 3y + z = 34$$

$$x + 2y + 3z = 26$$

Pentru rezolvare, chinezii au întocmit tabela:

1	2	3	calitatea	I
2	3	2	„	II
3	1	1	„	III
26	34	39	măsuri.	

Apoi, înmulțind numerele din coloana a II-a cu „numărul calității I“ din coloana a III-a, adică cu 3, și scăzând din ele de două ori numerele coloanei a III-a, au obținut următoarea tabelă:

1	0	3	calitatea	I
2	5	2	„	II
3	1	1	„	III
26	24	39	măsuri.	

În notarea modernă, tabela are următorul aspect:

$$3x + 2y + z = 39$$

$$5y + z = 24$$

$$x + 2y + 3z = 26$$

Apoi, numerele din coloana a treia se scădeau din numerele întregite ale coloanei a doua și se obține tabela:

0	0	3	calitatea	I
4	5	2	„	II
8	1	1	„	III
39	24	39	măsuri,	

de unde se obținea tabela:

4	5	calitatea	II
8	1	„	III
39	24	măsuri.	

În notarea actuală, aceasta dă:

$$5y + z = 24$$

$$4y + 8z = 39$$

În sfârșit, înmulțind numerele din coloana I-a, cu „numărul calității a II-a“ din coloana a II-a, adică cu 5 și scăzând din ele „numărul calității a II-a“ din prima coloană, adică cu 4, ei obțineau:

0	20	calitatea	II
36	4	„	III
99	96	măsuri,	

ceea ce dă tabela:

36 calitatea III
99 măsuri,

iar în notarea actuală: $36z=99$.

De unde s-a obținut că snopul de cereale de calitatea a III-a este egal cu $2\frac{3}{4}$ măsuri, adică cu notarea modernă:

$$z=\frac{99}{36}=2\frac{3}{4}\text{ măsuri, etc.}$$

111. Numerele respective formează o progresie geometrică în care primul termen $a_1=1$, iar rația $q=2$.

$$S_n=\frac{a_nq-a_1}{q-1}=\frac{2^{63}\cdot 2-1}{1}=2^{64}-1$$

$$\log. 2^{64}=64\log 2=64\cdot 0,30103=19,26592$$

$$2^{64}=18446666666666666666$$

Cantitatea de boabe de grâu ce se cuveneau vizirului este cu 1 mai puțin și reprezintă aproximativ recolta de grâu pe 10 ani de pe întreaga suprafață a pământului.

112. Autorul manuscrisului propune următoarea rezolvare: în 12 ore, leul mănîncă 12 oi, lupul 6, iar cîinele 4. Împreună, ei mănîncă în 12 ore 22 oi; urmează că într-o oră ei mănîncă $\frac{22}{12}=\frac{11}{6}$ oi, iar o oaie o mănîncă în $\frac{6}{11}$ ore.

$$\textbf{113. } S=1+2+2^2+2^3+\ldots +2^{29}+2^{30}.$$

Avem o progresie geometrică în care primul termen este 1, rația 2, iar numărul termenilor 31.

$$S_n=\frac{a(q^n-1)}{q-1}=\frac{1(2^{31}-1)}{2-1}=2^{31}-1=2147183647$$

$$\textbf{114. } \frac{x}{2}+1=\frac{x-2}{4} \qquad x-\frac{x+2}{2}=\frac{x-2}{2}$$

$$\frac{x-2}{4}+1=\frac{x+2}{4} \qquad \frac{x-2}{2}-\frac{x+2}{4}=\frac{x-6}{4}$$

$$\frac{x-6}{8}+3=\frac{x+18}{8}$$

$$\frac{x+2}{2}+\frac{x+2}{4}+\frac{x+18}{8}=x; \quad x=30 \text{ prune.}$$

$$115. y + 1 = 2(x - 1)$$

$$x = 5 \text{ saci (ducea calul)}$$

$$y - 1 = x + 1$$

$$y = 7 \text{ saci (ducea catîrul)}$$

$$116. n_1 = \frac{\left(15 : \frac{2}{3}\right) \cdot 4}{15} = 6 \text{ ori;}$$

$$n_2 = \frac{\left(15 : \frac{2}{3}\right) \cdot 3 \frac{1}{3}}{15} = 5 \text{ ori.}$$

$$117. 40 \cdot x = 45(x - 1); x - 1 = 8 \text{ zile.}$$

118. Pentru 24 caiele el a trebuit să plătească:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{24-3} \text{ copeici;}$$

$$S = \frac{2^{24} - 2 - \frac{1}{4}}{2 - 1} = 2^{22} - \frac{1}{4} = 4194303 \frac{3}{4} \text{ copeici,}$$

deci aproape 42 000 de ruble.

$$119. \frac{1}{14} + \frac{1}{x} = \frac{1}{10}; \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{10} - \frac{1}{14} = \frac{4}{140}; \quad x = \frac{140}{4} = 35 \text{ zile.}$$

$$120. 7 + \frac{7x}{12} = 5 + x; x = 4,80 \text{ ruble.}$$

$$121. \frac{2x}{5} + \frac{2x}{7} + \frac{x}{4} + 27 = x; \quad x = 420 \text{ oameni.}$$

$$122. x - 1 = y + 1 \quad x = 7 \text{ vedre,}$$

$$x + 1 = 2(y - 1) \quad y = 5 \text{ vedre.}$$

$$123. \frac{x}{5} = \frac{y}{3} = \frac{x+y}{5+3} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2};$$

$$\frac{x}{5} = \frac{3}{2}; \quad x = \frac{15}{2} = 7 \frac{1}{2} \text{ ore.}$$

$$124. x + \frac{2}{3}y = 38 \quad x = 25 \frac{1}{3} \text{ ruble,}$$

$$y + \frac{3}{4}x = 38 \quad y = 19 \text{ ruble.}$$

$$125. \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{96}.$$

$$126. \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}.$$

127. Formăm ecuația:

$$65535 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{x-1}$$

sau $65535 = \frac{2^{x-1} \cdot 2 - 1}{2 - 1} = 2^x - 1$ de unde obținem:

$$65536 = 2^x \text{ și } x = 16.$$

$$128. \quad \frac{x}{9} + \frac{8x}{21} + \frac{32x}{105} + 1,92 = x \quad x = \frac{604,80}{64} = 9,45 \text{ ruble.}$$

$$I = 9,45 \cdot \frac{1}{9} = 1,05 \text{ ruble,}$$

$$II = 9,45 \cdot \frac{3}{7} = 3,60 \text{ „ ,}$$

$$III = 9,45 \cdot \frac{3}{5} = 2,88 \text{ „ .}$$

129. a) Cel cu 2 pîini ia toți banii; b) unul ia 2 lei, celălalt 5 lei; c) unul trebuia să mai dea 1 leu, iar celălalt urmează să primească 5 lei; d) unul primește 2 lei, altul 1 leu, iar al treilea nimic.

130. Hotărăsc să vîndă ouăle nu cîte 10 cum se obișnuia, ci cîte 7. Pentru fiecare grupă de 7 ouă să ceară 3 copeici, iar pe cele rămase să le vîndă cu cîte 9 copeici oul. Procedînd astfel fiecare încasa: a) $(7) \cdot 3 + 3 \cdot 9 = 30$ copeici; b) $(7) \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 9 = 30$ copeici; c) $(7) \cdot 7 \cdot 3 + 1 \cdot 9 = 30$ copeici (am notat cu (7) o grupă de 7 ouă).

131. Evident meditatorul trebuia să rezolve problema aritmetic. Folosește, în acest caz, metoda falsei ipoteze; presupune că s-a cumpărat numai stofă neagră:

$$138 \cdot 3 = 414 \text{ lei;}$$

$$540 - 414 = 126 \text{ lei.}$$

Împarte diferența totală la diferența unitară:

$$126 : (5 - 3) = 63 \text{ m stofă albastră,}$$

$$138 - 63 = 75 \text{ m stofă neagră.}$$

132. După ce a trecut capra pe celălalt mal, omul se întoarce, ia în barcă varza și o duce pe celălalt mal; aduce înapoi capra; trece cu lupul, se întoarce și ia în sfîrșit capra.

$$133. \quad 2x + \frac{x}{2} + \frac{x}{4} + 1 = 100; \quad x = 36 \text{ giște.}$$

134. În timp ce iepurele face 3 sărituri, cîinele face 2, care sînt cît 5 ale iepurelui; deci cîinele cîștigă $5 - 3$, adică 2 sărituri de iepure în timp ce face 2 de-ale lui; deci la fiecare săritură a lui cîștigă cîte o săritură de iepure.

Cele 75 sărituri le cîștigă după 75 sărituri de-ale sale.

Deci după 75 sărituri cîinele ajunge iepurele care era înaintea lui cu 75 sărituri.

135. Notăm cu x numărul săriturilor pe care le mai face vulpea.

Cînd vulpea face 9 sărituri, ogarul face 6; deci cînd vulpea face x , ogarul face $\frac{6x}{9}$ adică $\frac{2x}{3}$ sărituri. Știm apoi că 3 sărituri ale ogarului au ca lungime 7 sărituri ale vulpii, deci:

$$\frac{2x}{3} \text{ sărituri ale ogarului au ca lungime } \frac{2x}{3} \cdot \frac{7}{3} = \frac{14x}{9} \text{ sărituri ale vulpii.}$$

Dar lungimea parcursă de ogar este dată și de relația:

$60 + x$. De aici, ecuația:

$$\frac{14x}{9} = 60 + x; \quad x = 108 \text{ sărituri.}$$

136. O săritură de cîine $= \frac{7}{4}$ sărituri de cal;

$$6 \text{ sărituri de cîine} = \frac{7}{4} \cdot 6 = \frac{21}{2} \text{ sărituri de cal;}$$

Fie x distanța ce o va parcurge calul:

$$\frac{\frac{5,5 + x}{21}}{\frac{1}{2}} = \frac{x}{5}; \quad X = \frac{55}{11} = 5 \text{ km.}$$

2. Probleme captivante

1. Cerc: $R = \frac{1\,000}{\pi} = \frac{1}{\pi} \text{ km}, \quad S = \frac{1}{\pi} \text{ km}^2 \simeq 32 \text{ ha.}$

2. $x + 120 = 3(y + 25) \quad x = 735 \text{ ruble,}$

$x + 25 = 2(y + 120) \quad y = 260 \text{ ruble.}$

3. Dacă cei doi cîini ar fi tras sania încă 50 de mile, întîrzierea ar fi fost numai de o zi, nu de două zile.

De vreme ce întîrzierea a fost de 2 zile, rezultă că mai rămăseseră de străbătut încă 100 mile.

Dacă el s-ar fi deplasat după prima zi tot cu viteza inițială, atunci în loc de 100 de mile ar fi străbătut $100 : \frac{3}{5} = 166 \frac{2}{3}$ mile.

Cele $66 \frac{2}{3}$ mile pe care le-ar fi parcurs în plus i-ar fi economisit două zile de drum. De aici rezultă că viteza prevăzută inițial de Jack London era de $33 \frac{1}{3}$ mile pe zi. În prima zi el a străbătut $33 \frac{1}{3}$ mile. Adunîndu-le cu cele 100 de mile rămase, aflăm că pînă la tabără erau $100 + 33 \frac{1}{3} = 133 \frac{1}{3}$ mile.

4. Restul de 8 cartofi reprezintă $\frac{2}{3}$ din cartofii (C_3) ce erau pe masă cînd s-a sculat al treilea drumeț (D_3). Deci:

$$C_3 = 8 : \frac{2}{3} = 8 \cdot \frac{3}{2} = 12 \text{ cartofi,}$$

$$C_2 = 12 : \frac{2}{3} = 18 \text{ cartofi,}$$

$$C_1 = 18 : \frac{2}{3} = 27 \text{ „.}$$

Au fost deci, la început, 27 cartofi. Fiecare drumeț avea dreptul să mănînce 9 cartofi. Așadar: D_1 nu mai mănîncă nimic; D_2 mai primește $9 - 6 = 3$ cartofi, iar D_3 : $9 - 4 = 5$ cartofi.

5. Problema nu este „grea“ decît dacă se cere rezolvată mintal. În acest caz, putem gîndi astfel: Consider fiecare număr (baza puterii) ca o sumă, exemplu: $12=10+2$ etc.

Ridic la pătrat mintal după formula binomului; rezultă (schematic):

$$\begin{array}{r} 500 \\ 20 + 1 \\ 40 + 4 \\ 60 + 9 \\ 80 + 16 \\ \hline 700 + 30, \end{array} \quad 730 : 365 = 2.$$

6. La plecare sînt deja pe drum 7 vapoare, fiecare la o zi distanță unul de altul. Întîlnim pe zi 2 vapoare, iar pe tot parcursul, 13. Al 14-lea tocmai intra cînd plecam noi, iar al 15-lea pleacă atunci cînd ajungem.

Pe un interval de o zi întîlnește două vapoare: unul la $1/2$ zi drum (după 12 ore), altul după o zi drum (la 24 ore).

7.

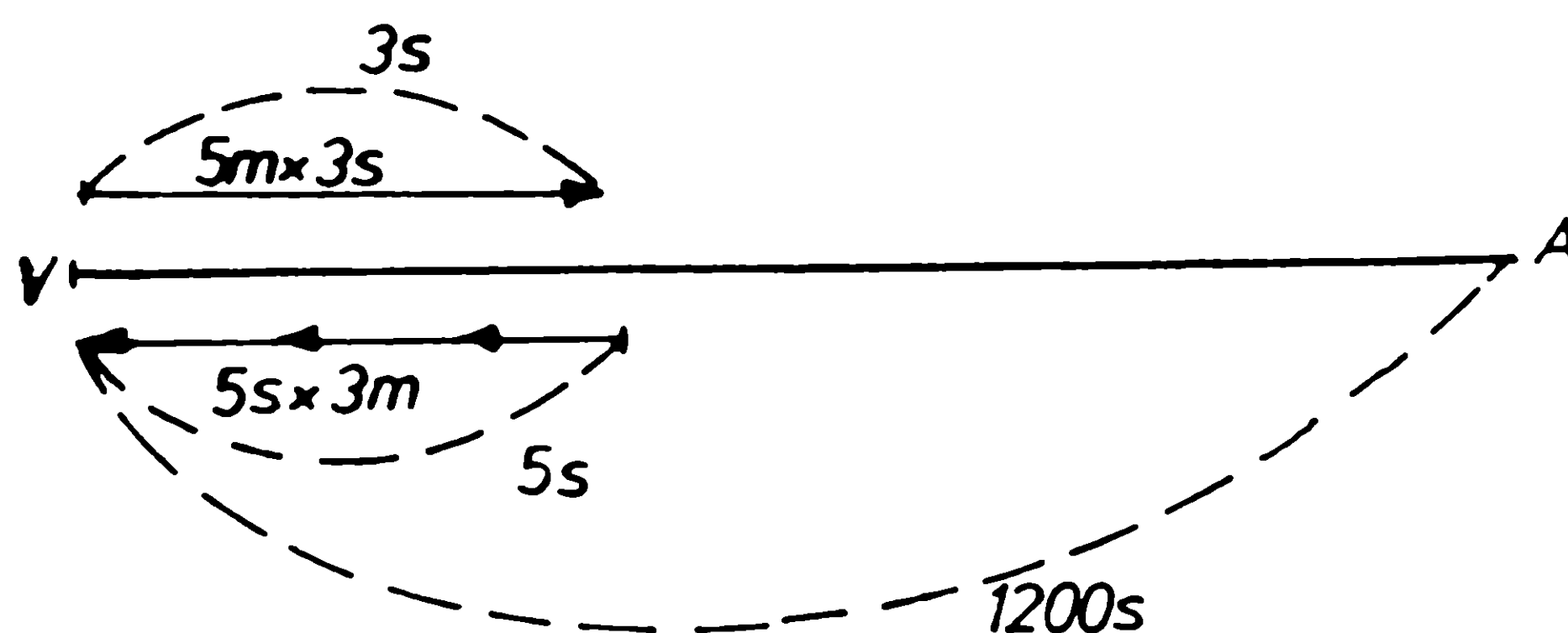


Fig. 40.

$$20 \text{ m} \cdot 60 = 1\,200 \text{ s}; \quad 5 \text{ m} \cdot 3 \text{ s} = 3 \text{ m} \cdot 5 \text{ s} = 15 \text{ m}.$$

Se duce și se înapoiază în 8 s, deci: $\frac{1\,200}{8} \cdot 15 = 2\,250 \text{ m}.$

8. Vom numi iarba care crește pe o arie într-o zi „rație“ (cotă). Din primele două livezi, pe lângă iarba care era în ele s-a mai păscut $48 \cdot 18 = 864$ și $90 \cdot 30 = 2\,700$ rații. Pentru a vedea cît este de mare o rație să folosim metoda transformărilor succesive ca să avem același număr de boi și de zile în cele două livezi.

Luăm a 16-a parte din numărul boilor și a 3-a parte din numărul zilelor la prima livadă și găsim că 4 boi în 6 zile pasc 1 arie și 18 rații.

Luăm a 16-a parte din numărul boilor și a 5-a parte din numărul zilelor în a doua livadă și găsim că 14 boi în 6 zile pasc 3 arii și 90 de rații. Deci 28 de boi în 6 zile pasc sau 7 arii și 126 rații sau 6 arii și 180 de rații.

De aici reiese că o arie echivalează cu 54 de rații.

Prima livadă echivalează cu 3 456 de rații și 1 bou paște 3 rații pe zi. Livada a 3-a echivalează cu 4 440 de rații, deci pe zi 222 rații. Se pot hrăni acolo 74 boi.

Cum procedăm dacă datele problemei sînt schimbate? Aducem datele problemei la același termen de comparație și anume: Vom căuta să avem același număr de boi și de zile pe primele două pășuni și să găsim, apoi, o unitate de măsură unică pentru cantitatea de iarbă pe care o paște un bou pe zi etc.

9. Fie x numărul boilor (pe ultimul izlaz); y , înălțimea inițială a ierbii și z , cantitatea cu care crește iarba zilnic (y și z : necunoscute auxiliare).

Volumul ierbii pe primul izlaz $= 3 \frac{1}{3} \text{ ha } (y + 28z)$.

Un bou mănîncă pe zi: $\frac{3 \frac{1}{3} (y + 28z)}{12 \cdot 28}$;

$$\frac{3 \frac{1}{3} (y + 28z)}{12 \cdot 28} = \frac{10(y + 63z)}{21 \cdot 63} = \frac{24(y + 126z)}{x \cdot 126}$$

$$y = \frac{\left(3 \frac{1}{3} \cdot 21 - 10 \cdot 12 \right) \cdot 28 \cdot 63z}{10 \cdot 12 \cdot 28 - 3 \frac{1}{3} \cdot 21 \cdot 63} = \frac{88\,200}{1\,050} = 84;$$

se introduce în ultimele două rapoarte, dispăre z și se obține:

$$x = \frac{24 \left(3 \frac{1}{3} \cdot 21 \cdot 63 \right) (126 - 28) + 10 \cdot 12 \cdot 28 (63 - 126)}{3 \frac{1}{3} \cdot 10 \cdot 126 (63 - 28)} = 36 \text{ boi.}$$

Generalizare. Se pot face următoarele notații: iarba unei livezi cu aria S_1 a putut hrăni n_1 boi timp de t_1 zile. Iarba unei livezi cu aria S_2 a hrănit n_2 boi timp de t_2 zile. Să se afle cîți boi poate hrăni iarba unei livezi cu aria S_3 timp de t_3 zile.

Rezolvare. Să presupunem că înălțimea ierbii era aceeași în cele trei livezi, înainte de ducerea boilor la păscut; notăm această înălțime cu y . Mai presupunem că iarba crește pe zi cu aceeași cantitate z . Cantitățile y și z sînt necunoscute auxiliare. Fie x numărul boilor care trebuie duși în ultima livadă.

Într-o zi iarba crește cu cantitatea z ; în t_1 zile crește cu cantitatea $t_1 z$. Deci în prima livadă înălțimea ierbii devine $(y + t_1 z)$ după t_1 zile. Volumul ierbii este $S_1(y + t_1 z)$. Acest volum este mîncat de n_1 boi în t_1 zile. Deci un bou mănîncă într-o zi: $\frac{S_1(y + t_1 z)}{n_1 t_1}$. În mod analog, cantitățile mîncate de un

bou într-o zi, în celelalte livezi sînt: $\frac{S_2(y + t_2 z)}{n_2 t_2}$; $\frac{S_3(y + t_3 z)}{t_3 x}$.

Scriem că aceste cantități sînt egale:

$$(1) \quad \frac{S_1(y + t_1 z)}{n_1 t_1} = \frac{S_2(y + t_2 z)}{n_2 t_2} = \frac{S_3(y + t_3 z)}{t_3 x}$$

$$\text{Deducem: } y = \frac{(S_1 n_2 - S_2 n_1) t_1 t_2 z}{S_2 n_1 t_1 - S_1 n_2 t_2}.$$

Ducem valoarea lui y în ecuația formată de ultimele rapoarte din (1). Dispare z și găsim:

$$z = \frac{S_3(S_1 n_2 t_2(t_3 - t_1) + S_2 n_1 t_1(t_2 - t_3))}{S_1 S_2 t_3(t_2 - t_1)},$$

10. Notînd cu x, y, z, u și v numărul cangurilor, vulpilor, șerpilor, tigrilor și urangutanilor, avem ecuațiile:

$$1) \quad x + y + z + u + v = 37$$

$$2) \quad 2(x + v) + 4(y + u) = 86$$

$$3) \quad x + y + 2z + u + v = 44$$

$$4) \quad x = y + u$$

$$5) \quad z = u + v$$

cu următoarea soluție:

$$x=13, \quad y=10, \quad z=7, \quad u=3 \quad \text{și} \quad v=4.$$

11. Fie x , cîte ouă avea prima țărancă. Din ipoteza făcută reiese că cele două țărânci vindeau ouăle cu:

$$\frac{6\frac{2}{3}}{x}, \text{ respectiv } \frac{15}{100-x} \text{ creițari. Scriem că sumele încasate erau egale:}$$

$$x \cdot \frac{15}{100-x} = (100-x) \cdot \frac{6\frac{2}{3}}{x}; \quad x=40 \text{ ouă. Rezultă că a doua țărancă adusesse 60 de ouă.}$$

$$12. \quad 170 - 10x = 10y$$

$$x=9,$$

$$170 - 170y = 170x$$

$$y=8 \text{ m/s.}$$

$$13. \quad x = \text{numărul cosașilor,}$$

$$z = \text{cît cosește fiecare pe zi (necunoscută auxiliară);}$$

$$\frac{xz}{2} + \frac{xz}{4} = 2\left(\frac{xz}{4} + z\right); \quad x=8 \text{ cosași.}$$

Rezolvare aritmetică (metoda figurativă).

a) Dacă pe izlazul mare a lucrat o jumătate de zi întreaga echipă și o jumătate de zi numai o jumătate de echipă, este clar că într-o jumătate de zi, o jumătate din echipă cosește $\frac{1}{3}$ din izlaz. Prin urmare, pe izlazul mic a rămas necosită o suprafață de $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Dacă un cosaș cosește într-o zi $\frac{1}{6}$ din izlaz, iar în total a fost cosit $\frac{6}{6} + \frac{2}{6} = \frac{8}{6}$, reiese că în total au fost 8 cosași.

b) Luăm ca unitate de timp comună $t = \frac{1}{2}$ zile. Terenul I (hașurat) este cosit în $1/2$ zi de 2 oameni. În două jumătăți de zi, prima jumătate din grupul de cosași cosește două loturi egale $A=C$, iar a doua jumătate a grupului de

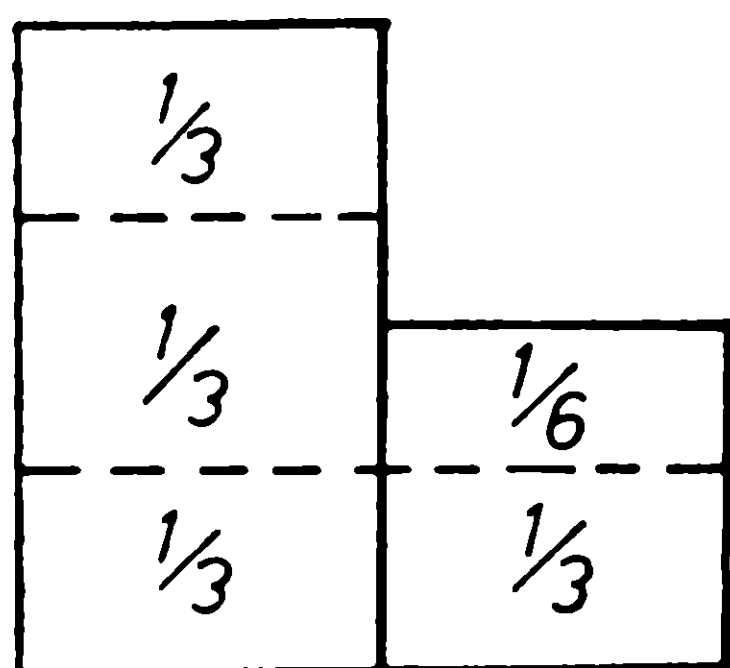


Fig. 41.

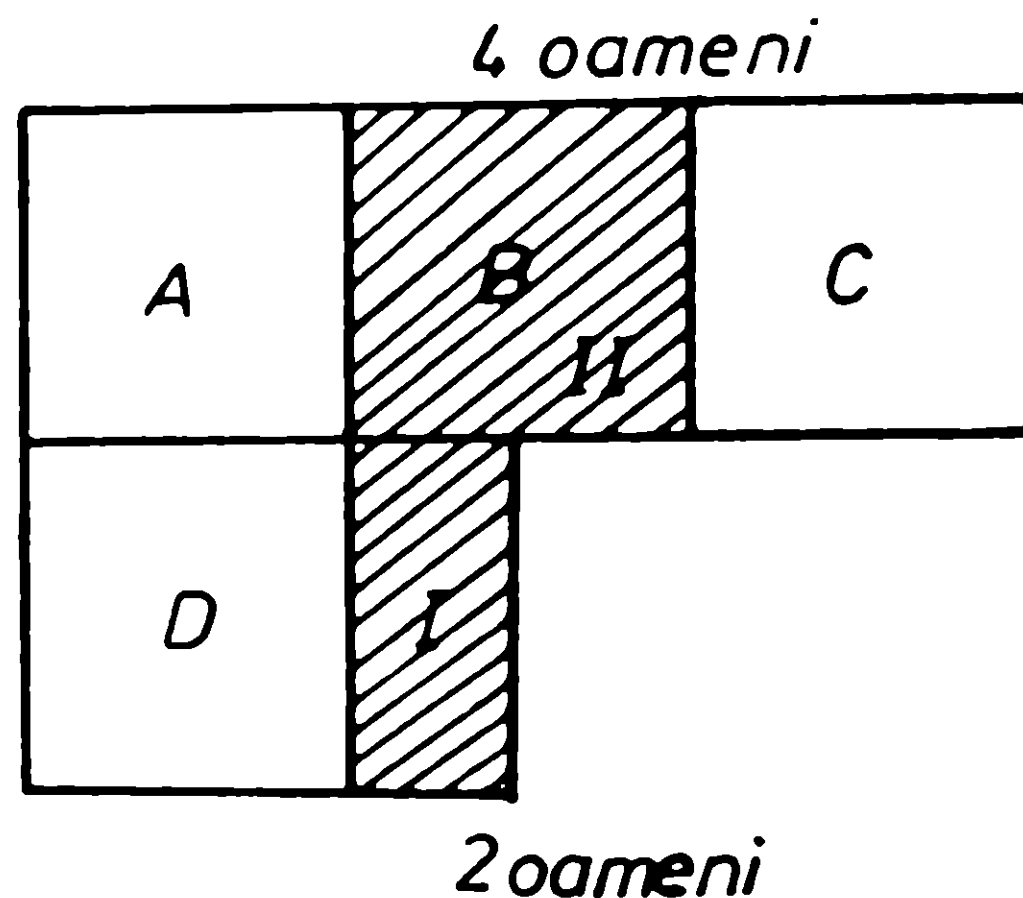


Fig. 42.

cosași cosește alte două loturi egale, B și D. Dar B este dublul terenului I hașurat, deci a fost cosit într-o jumătate de zi de 4 oameni.

Rezultă că grupul s-a împărțit în două echipe de câte 4 oameni, deci era compus din 8 oameni.

14. Producția în 1950 este de $5\,000 + \frac{20}{100} \cdot 5\,000 = \frac{6}{5} \cdot 5\,000$ tone. Deci producția unui an este $\frac{6}{5}$ din producția anului precedent. Deci în x ani producția totalizată va fi:

$$5\,000 + \frac{6}{5} \cdot 5\,000 + \left(\frac{6}{5}\right)^2 \cdot 5\,000 + \dots + \left(\frac{6}{5}\right)^{x-1} \cdot 5\,000 = 50\,000$$

Împărțind cu 5 000 avem:

$$1 + \frac{6}{5} + \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \dots + \left(\frac{6}{5}\right)^{x-1} = 10;$$

$$S = \frac{\left(\frac{6}{5}\right)^x - 1}{\frac{6}{5} - 1} = 10 \text{ sau } \left(\frac{6}{5}\right)^x = 3.$$

Aplicînd logaritmi, obținem:

$$x \lg \frac{6}{5} = \lg 3 \text{ sau } x = \frac{\lg 3}{\lg 6 - \lg 5}; \quad x = 6 \text{ ani.}$$

15.

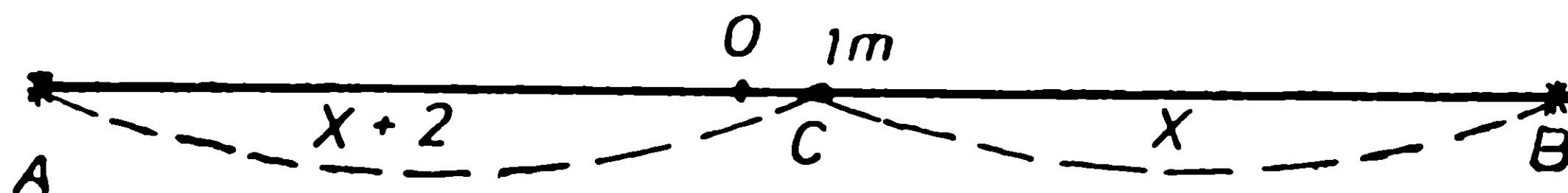


Fig. 43.

Notez distanța BC cu x ; $AB = 2(x+1)$. Ținînd seama că iluminarea este invers proporțională cu pătratul distanței de la izvorul de lumină, avem: $\frac{20}{45} = \frac{x^2}{(x+2)^2} \cdot 2$ de unde: $5x^2 - 16x - 16 = 0$ soluția acceptabilă $x_1 = x = 4$; $d = 2(x+1) = 10$ m.

16. R. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 și 489 lei (de fiecare dată dublu apoi restul), căci scriind numărul în baza 2, avem:

$$1000_{10} = 1111101000_2 = 1 \cdot 2^9 + 1 \cdot 2^8 + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0; \text{ înlocuim pe } 1 \cdot 2^9 = 512 \text{ cu } 1 + 2 + 4 + 16 + 489.$$

17. Notăm cu x viteza trenului I, cu y viteza trenului II și z distanța AB. Socotim vitezele în kilometri pe minut.

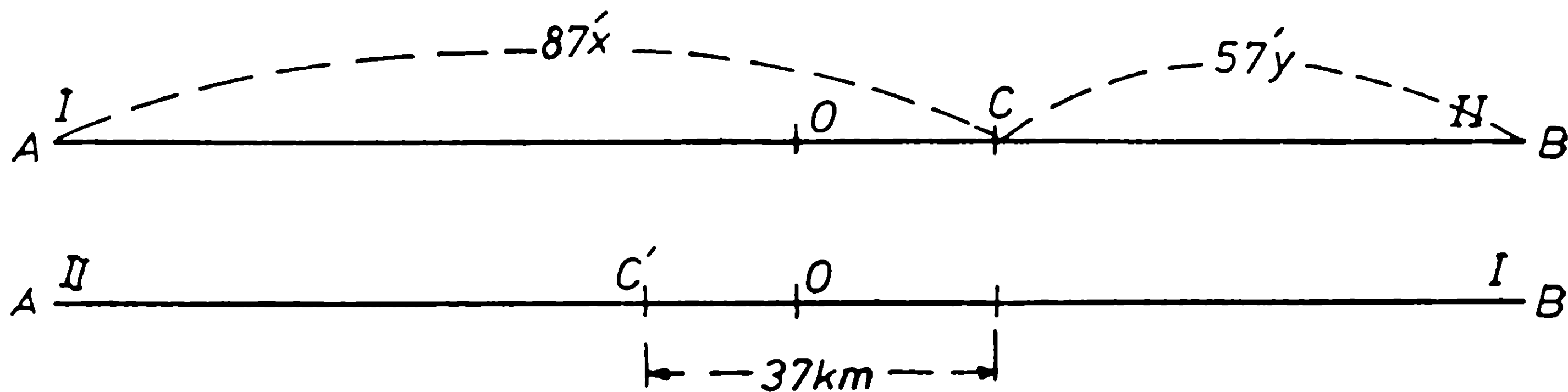


Fig. 44.

Rezultă imediat ecuația: (1): $87x + 57y = z$.

La ora 19, distanța între trenuri se micșorase cu $\frac{4}{5}$ din distanța AB, adică trenurile au străbătut împreună, în timp de o oră:

$$60x + 60y = \frac{4}{5} z \text{ sau } (2): x + y = \frac{z}{75}.$$

Din sistemul format din ecuațiile (1) și (2) deducem:

$$x = \frac{z}{125}; \quad y = \frac{2z}{375} \text{ sau } x = \frac{3z}{375}; \quad y = \frac{2z}{375}.$$

Rezultă $x > y$, deci punctul C este la dreapta punctului O. De asemenea C' se va afla la stînga punctului O.

La întoarcere, trenul I parcurge distanța $BC' = BC + CC' = 57y + 37$, în același timp în care trenul II parcurge distanța $AC' = AC - CC' = 87x - 37$, deci:

$$(3) \quad \frac{57y + 37}{x} = \frac{87x - 37}{y}$$

Scriem că suma numărătorilor pe suma numitorilor este un raport egal cu fiecare din rapoartele date:

$$(4) \quad \frac{87x + 57y}{x + y} = \frac{57y + 37}{x} = \frac{87x - 37}{y}$$

Ținînd seama de ecuațiile (1) și (2), ecuațiile (4) dau sistemul:

$$\frac{\frac{z}{75}}{\frac{z}{75}} = \frac{57y + 37}{x} = \frac{87x - 37}{y}$$

$$5) \quad 75x - 57y = 37$$

$$x = 1 \text{ km/minut,}$$

$$87x - 75y = 37$$

$$y = \frac{2}{3} \text{ km/minut.}$$

$$AC = 87x = 87 \text{ km}$$

$$CB = 57y = 57 \cdot \frac{2}{3} = 38 \text{ km;}$$

$$AB = 125 \text{ km.}$$

Vitezele trenurilor sînt de 60 km/oră și 40 km/oră.

$$AC = 87x - 37 = 87 - 37 = 50 \text{ km.}$$

Timpul în care a fost parcurs drumul AC este egal cu $\frac{50}{40} h = 1$ oră și 15 minute.

Deci trenurile se vor întâlni la ora 19 și 15 minute.

Soluția aritmetică dată de autorul problemei.

„Dacă ambele trenuri, pornind seara, parcurg într-o oră (de la 18 la 19) $\frac{4}{5}$ din distanța AB, ele vor parcurge $1/5$ din aceeași distanță într-un sfert de oră.

Deci ele se vor întâlni la ora 19 și 15 minute, după o oră și un sfert de mers.

Dimineața trenul din A mersese 87 de minute, de la ora 6 pînă la ora 7 și 27 de minute, deci cu 12 minute mai mult decît seara, pe cînd trenul din B numai 57 de minute, de la ora 6 și 30 de minute pînă la ora 7 și 27 de minute, adică cu 18 minute mai puțin. Deoarece distanța parcursă atît dimineața, cît și seara este aceeași și anume distanța AB, rezultă că distanța făcută dimineața mai mult de trenul din A este tocmai cea făcută mai puțin de trenul din B. Deci trenul din A merge mai repede decît cel din B, prin urmare seara întîlnirea se va face în C la 37 km de C, de partea stației A, fiindcă trenul B, care pleacă seara din A face pînă în C numai 75 de minute și cu o viteză mai mică. Acum problema se rezolvă numaidecît.

Seara trenul din A, care pleacă acum din B, parcurge distanța de la B pînă la C în 75 de minute; însă distanța BC el o parcurge în $\frac{12 \cdot 57}{18} = 38$ de minute, fiindcă aceeași distanță este parcursă dimineața de trenul din B în 57 de minute.

Prin urmare, trenul din A parcurge distanța de la C pînă la C', care este de 37 km în 37 de minute. El are deci o viteză de 60 km/oră. Trenul din B va avea deci o viteză de $\frac{12 \cdot 60}{18} = 40$ km/oră. Distanța AC, parcursă de primul tren în 87 de minute, va fi de 87 km, iar distanța BC, parcursă de același tren în 38 de minute va fi deci de 38 km.

Distanța totală este de 125 km.“

18. Problema se reduce la a găsi cîte hîrtii de 3 ruble (x) trebuie să dea cetățeanul ca să poată primi restul în hîrtii de 5 ruble (y):

$3x - 5y = 19$ (unde x și y sînt numere întregi și pozitive); $x = \frac{19 + 5y}{3} = 6 + y + \frac{1 + 2y}{3}$. Egalitatea va avea loc numai dacă și $\frac{1 + 2y}{3}$ este număr întreg.

Fie t valoarea acestei fracții. Atunci

$$x = 6 + y + t, \text{ unde } t = \frac{1 + 2y}{3}$$

$$3t = 1 + 2y \quad (1); \quad 2y = 3t - 1^1; \quad y = \frac{3t - 1}{2} = t + \frac{t - 1}{2}$$

Punem iar condiția ca $\frac{t - 1}{2}$ să fie număr întreg $= t_1$.

Relația (1) devine: $y = t + t_1$, în care $t_1 = \frac{t - 1}{2}$, de unde $2t_1 = t - 1$ și $t = 2t_1 + 1$.

Înlocuind valoarea $t = 2t_1 + 1$ în ecuațiile precedente, obținem:

$$y = t + t_1 = (2t_1 + 1) + t_1 = 3t_1 + 1$$

¹ Mai scurt, rezultă de aci că t este impar, $t = 2k + 1$.

$$x = 6 + y + t = 6 + (3t_1 + 1) + (2t_1 + 1) = 8 + 5t_1$$

Astfel, pentru x și y rezultă expresiile:

$$x = 8 + 5t_1 > 0$$

$$y = 1 + 3t_1 > 0$$

Rezolvînd, rezultă $t_1 > -\frac{8}{5}$ și $t_1 > -\frac{1}{3}$.

Dar cum t_1 este un număr întreg, deducem că pentru el sînt posibile numai următoarele valori: $t_1 = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$

Valorile corespunzătoare pentru x și y vor fi:

$$x = 8 + 5t_1 = 8, 13, 18, 23, \dots$$

$$y = 1 + 3t_1 = 1, 4, 7, 10, \dots$$

Am stabilit, astfel, modul în care poate fi făcută plata: Cetățeanul va da casierului 8 hîrtii de 3 ruble și va primi de la acesta din urmă o hîrtie de 5 ruble ($8 \cdot 3 - 5 = 19$ ruble).

20. R. 100 pionieri și 10 echipe.

21. Rezolvarea grafică

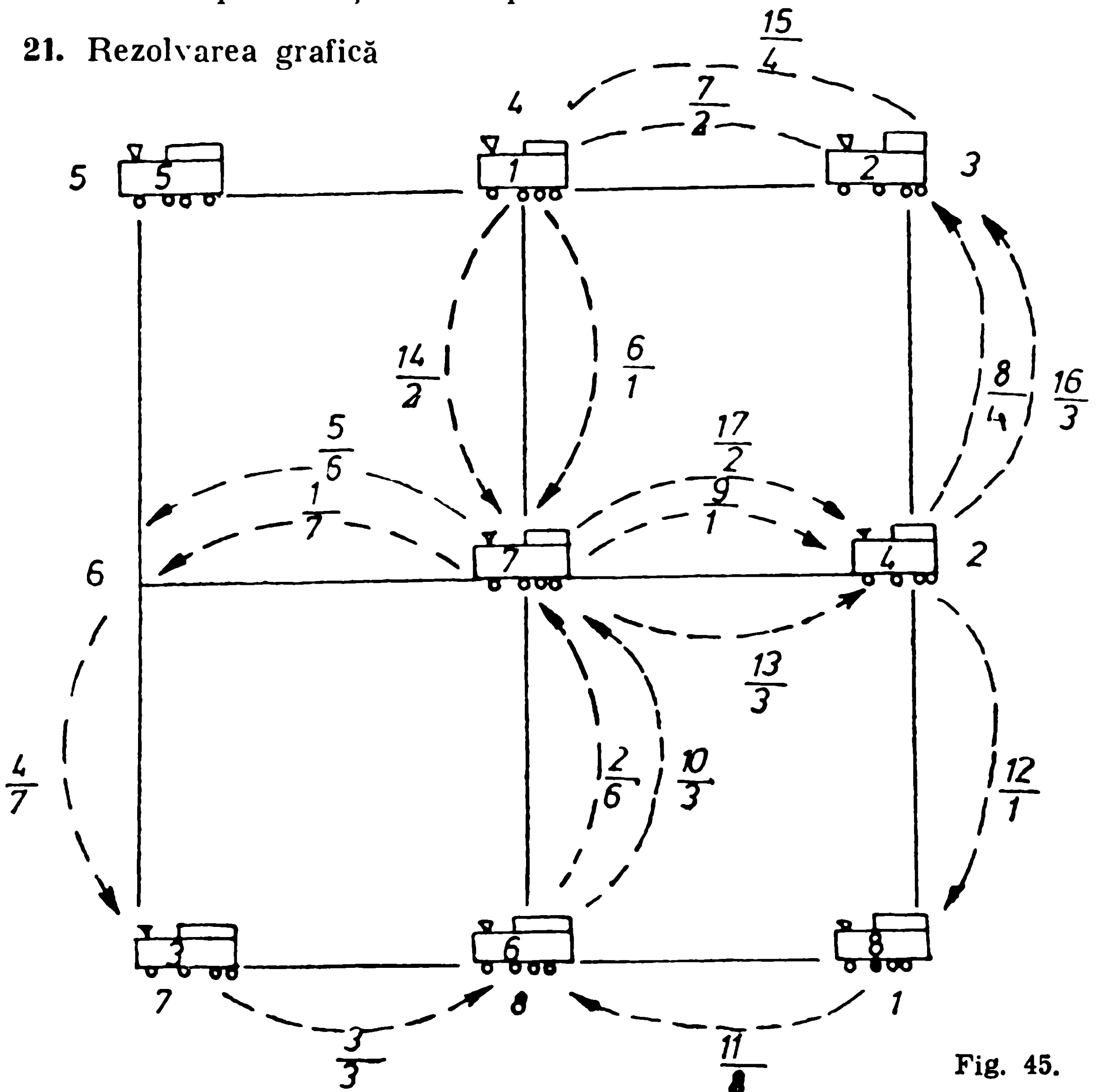


Fig. 45.

Notă: Numărătorul indică ordinea mișcării; numitorul, numărul locomotivei care se deplasează.

22. Trec întâi cei 2 fii. Unul din ei aduce barca înapoi și trece tatăl. Pe urmă, celălalt vine și ia pe fratele său.

23. Intuiția practică ne dă un răspuns afirmativ. Dar să vedem ce spune calculul. Construim figura 46, în care avem toate elementele geometrice și fizice ale problemei.

Triunghiurile ACO și OKL sînt asemenea, deci:

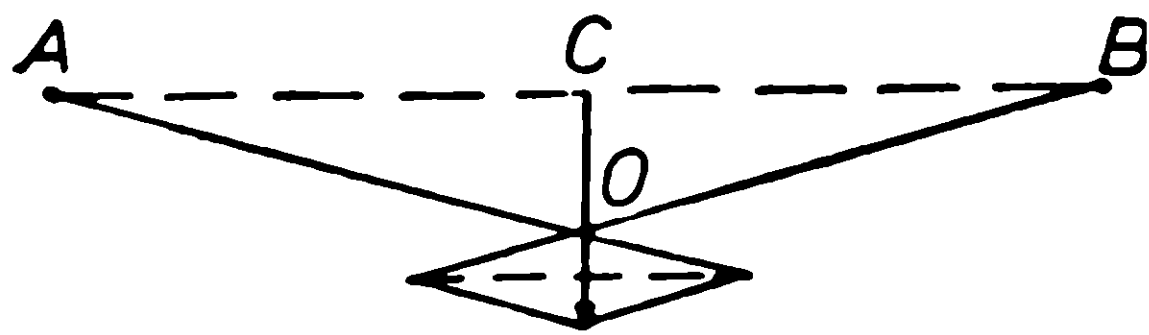


Fig. 46.

$$\frac{OL}{AO} = \frac{OK}{OC} \text{ sau } \frac{F}{\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{G}{2} \text{ de unde } F = \frac{GL}{4f}.$$

Formula $F = \frac{G1}{4f}$ exprimă adevărul că forța F cu care lampa trage de cablu este proporțională cu greutatea lămpii și lungimea cablului și invers proporțională cu săgeata.

Înlocuind, avem: $F = \frac{15 \cdot 20}{4 \cdot 0,15} = 500 \text{ kg}.$

Pare într-adevăr surprinzător ca o forță de 15 kg (greutatea lămpii) să se descompună în două forțe de câte 500 kg, dar aceasta este realitatea:

Dacă însă mărim săgeata, valoarea forței de întindere a cablului scade pînă cînd poate deveni egală cu jumătate din greutatea lămpii (cînd $f = \frac{1}{2}$).

24. Fie $AB = x$ lungimea finală a bradului, $BC = y$ lungimea pierdută $AC = x + y$ lungimea inițială a bradului. Cînd razele soarelui fac cu solul, presupus orizontal, un unghi $\alpha = 60^\circ$, umbra bradului $AC = x$, iar cînd razele soarelui fac cu solul unghiul $\beta = 30^\circ$, umbra bradului AB este $AE = y + 20 \text{ m}.$

Din triunghiul dreptunghic CAD avem:

$$CA = AD \operatorname{tg} \alpha$$

$$y + x = x \operatorname{tg} 60^\circ$$

Din triunghiul dreptunghic BAE avem:

$$BA = AE \cdot \operatorname{tg} \beta; \quad x = (y + 20) \cdot \operatorname{tg} 30^\circ.$$

Obținem sistemul de ecuații:

$$x + y = x \cdot \sqrt{3} \quad \text{cu următoarele soluții:}$$

$$x = (y + 20) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} \quad x = 20 \text{ m (lungimea finală),}$$

$$y = 14,64 \text{ m (lungimea pierdută),}$$

$$x + y = 34,64 \text{ m (lungimea inițială).}$$

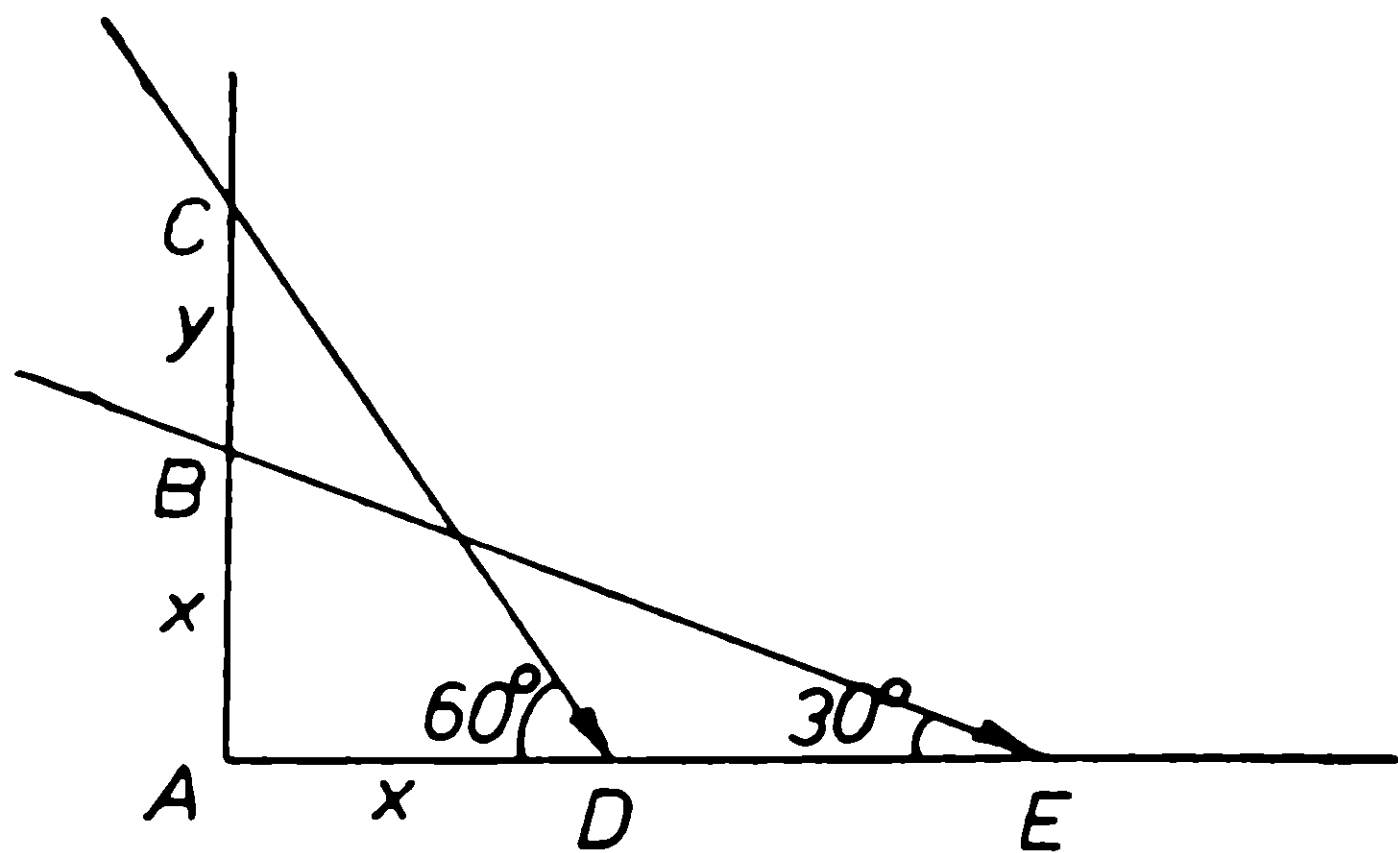


Fig. 47.

Observare. Triunghiurile CAD și EAB sînt egale, avînd cîte o catetă egală cu x și cîte un unghi de 30° .

Rezultă deci, direct: $x+y=y+20$; $x=20$ m

25. Fie x, y, z mizele ce se pun pe caii A, B, C.

Dacă A cîștigă, jucătorul primește ax și a plătit $(x+y+z)$.

Rezultă ecuația: $ax=x+y+z+s$ (1)

Dacă ar cîștiga B sau C, trebuie să avem ecuațiile:

$$by=x+y+z+s \quad (2)$$

$$cz=x+y+z+s \quad (3)$$

Pentru rezolvarea acestui sistem, scăzînd ecuațiile două cîte două, obținem¹: $ax-by=0$; $by-cz=0$; $ax-cz=0$.

$$x = \frac{b}{a}y; \quad z = \frac{b}{c}y. \text{ Ducem aceste valori în prima ecuație și avem: } by = \frac{by}{a} + y + \frac{by}{c} + s,$$

$$y = \frac{acs}{abc-ab-ac-bc}; \text{ apoi, din ecuațiile (2) și (3) scoatem:}$$

$$x = \frac{bcs}{abc-ab-ac-bc}; \quad z = \frac{abs}{abc-ab-ac-bc}.$$

26. Notăm: x , lățimea fluviului; $v_1 > v_2$ vitezele celor două poduri. Formăm ecuațiile:

$$\frac{x-720}{v_1} = \frac{720}{v_2},$$

$$\frac{x-720}{v_2} + 10' + \frac{420}{v_2} = \frac{720}{v_1} + 10' + \frac{x-400}{v_1}.$$

A doua ecuație devine în final:

$$\frac{x-320}{v_2} = \frac{x+320}{v_1} \rightarrow \frac{v_1}{v_2} = \frac{x+320}{x-320}$$

Prima ecuație se mai poate scrie: $\frac{v_1}{v_2} = \frac{x-720}{720}$

Prin egalare se obține ecuația a cărei soluție este $x=1\,760$ m.

27. Fie x numărul de echipe; ecuația: $x \cdot \frac{x-1}{2} = 55$

$$x=11 \text{ echipe.}$$

28. Problema se reduce la desenarea figurii 6, pag. 49 65 cu o singură trăsătură de creion. Dar aceasta este nerealizabil, deoarece, alegînd un punct oarecare din A, B, C, D ca punct inițial și unul oarecare ca punct final, va trebui să traversăm în drumul nostru prin două (trei) puncte, care nu vor fi nici inițiale, nici finale.

¹ Mai simplu: $x+y+z+s=k$, deci $ax=k$, $by=k$, $cz=k$; k este dat de ecuația $\frac{k}{a} + \frac{k}{b} + \frac{k}{c} + s = k$ etc.

Concluziile la care a ajuns Euler, studiind o problemă mai generală, sînt următoarele:

a) Figurile care au numai noduri pare (unde se întîlnesc un număr cu soț de trasee) sau numai două noduri impare se pot descrie dintr-o singură trăsătură de creion, plecînd de la oricare din noduri.

b) Figurile care au mai mult de două noduri impare nu se pot descrie printr-un singur parcurs continuu.

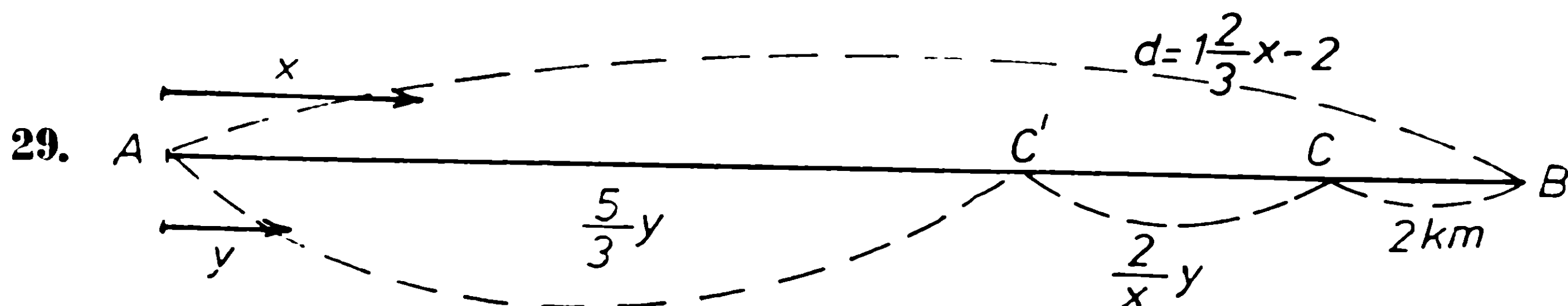


Fig. 48.

x = viteza călărețului; y = viteza drumețului.

$$(x+y)1 \frac{40}{60} = 2 \left(2 + \frac{5}{3} y + \frac{2}{x} \cdot y \right)$$

$$\frac{5}{6} y = 2 + \frac{2}{x} \cdot y$$

Scotînd valoarea lui $\frac{2y}{x}$ din ecuația a doua și înlocuind în prima, obținem: $2 \cdot \frac{y}{x} = \frac{5y-12}{6}$

$$(x+y) \frac{5}{3} = 2 \left(2 + \frac{5}{3} y + \frac{5y-12}{6} \right)$$

$$\frac{5}{3} x + \frac{5}{3} y = 4 + 2 \cdot \frac{5}{3} y + \frac{5y-12}{3}$$

$$5x + 5y = 12 + 10y + 5y - 12$$

$$5x = 10y; x = 2y$$

Înlocuind în ecuația a doua, avem:

$$2 \cdot \frac{y}{2y} = \frac{5y-12}{6}; \quad 1 = \frac{5y-12}{6}; \quad y = \frac{18}{5} = 3,6 \text{ km}$$

$$x = 2y = 2 \cdot 3,6 = 7,2 \text{ km.}$$

O soluție mai simplă (Eugen Rusu): $d = AB$; în timp ce călărețul (C) parcurge $d+2$, drumețul (D) face $d-2$, deci $\frac{v}{v} = \frac{d+2}{d-2}$. Distanța d făcută de (C)

în 50 minute, iar de (D) în 100 minute, deci $\frac{v}{v} = \frac{100}{50} = 2$. Din $\frac{d+2}{d-2} = 2$, rezultă $d=6$ etc.

30. $AB=10$; $BC=3$; $CE=2$.

$CD=2+x$; $AD=15-x$.

$EH=8$; $HD=x-8$.

În triunghiul AHD (dr.):

$$(15-x)^2 = 3^2 + (x-8)^2$$

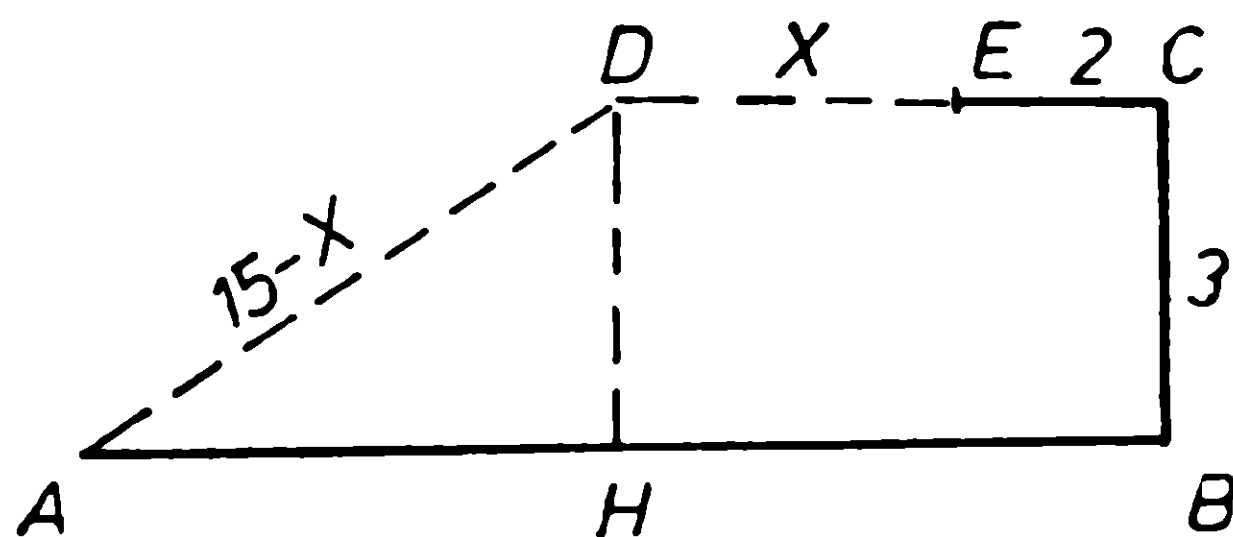


Fig. 49.

$$x = \frac{152}{14} = 11, \quad CD = 11 + 2 = 13$$

$$S \text{ trapez} = \frac{10+13}{2} \cdot 3 = \frac{69}{2} = 34,5 \text{ vp.}$$

Dacă parcela înconjurată ar fi fost un dreptunghi cu același perimetru (30 verste) suprafața înconjurată ar fi fost mai mare ($10 \cdot 5 = 50$ vp sau $7,5^2 = 56,25$ vp, în cazul când ar fi fost pătrat).

33. Ar rezulta că energia poate lua naștere „din nimic”, ceea ce nu este posibil.

Procentele de reducere a consumului trebuie aplicate succesiv, astfel:

$$100 \text{ kg combustibil} : \frac{30}{100} = 30 \text{ kg economie.}$$

$$(100-30) \cdot \frac{45}{100} = 31,5 \text{ kg economie,}$$

$$(70-31,5) \cdot \frac{25}{100} = 9,625 \text{ kg „ ”.}$$

$$\text{Economie totală: } 30 + 31,5 + 9,625 = 71,125 \text{ adică } 71 \frac{1}{8} \%.$$

34. Într-un minut ele parcurg: $(9\,000 + 21\,000) : 60 = 500$ mile.

În ultimul minut, distanța dintre ele este de $1\,317 - 2 \cdot 500 = 317$ mile.

35. Vezi figura 50.

Plecînd din A se urmează traseul ABC (plin), apoi traseul CDA (punctat).

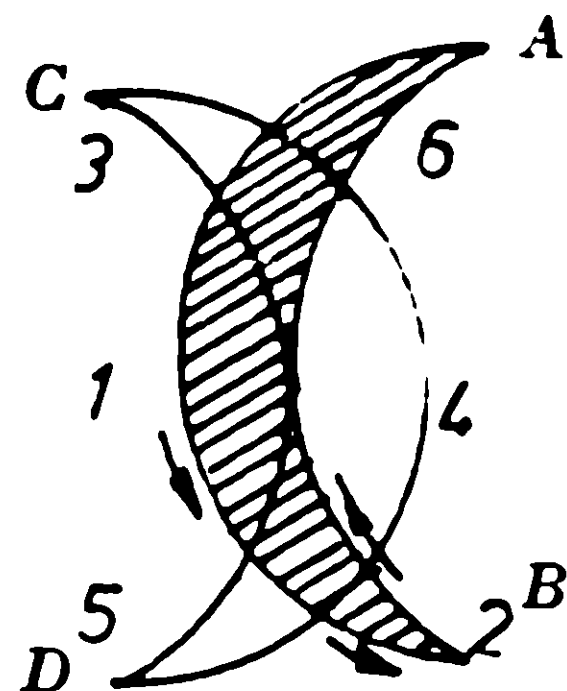


Fig. 50.

36. Să considerăm efectivele la mijlocul focului, căci ele variază în diferite momente ale luptei. În cele 10 minute, pînă la finele luptei, pleacă de la A și de la B respectiv cîte 50 și 60 focuri de fiecare trăgător, din care sînt ucigătoare 0,10 și 0,24. De aici reiese că efectivul lui A se reduce în 10 minute cu 0,24 din efectivul lui B și al acestuia cu 0,10 din efectivul lui A. Însă diferența efectivelor nu se schimbă, dacă pierderile unei linii le-am da ca sporuri la linia cealaltă. Deci după 10 minute de luptă, diferența efectivelor este egală cu 1,1 din efectivul A micșorat cu 1,24 din al lui B, diferență care s-a dat egală cu 92 soldați. Apoi linia A dînd 8 000 focuri mai mult ca linia B,

reiese că de 100 ori efectivul lui A întrece de 120 ori efectivul lui B cu 8 000, sau că efectivul lui A redus cu 1,2 din al lui B face 80 oameni. Prin urmare 1,1 ori efectivul lui A, redus cu 1,1 înmulțit cu 1,2 egal: 1,32 ori efectivul lui B, face 88 oameni. Deci 0,08 din efectivul lui B face 4 oameni. Deci pe linia B sînt 50 oameni. Ei au tras 6 000 focuri. Prin urmare din linia A s-au tras 14 000 focuri și deci acea linie are 140 trăgători.

De aci deducem că pe linia A erau la început 152 soldați, pe linia B erau 64; că la mijlocul luptei erau respectiv 140 și 50, iar la finele luptei, 128 și 136 soldați. (Soluția este aproximativă, căci nu se ține seama că trăgătorul ucis nu mai trage. Admițîndu-se o repartizare uniformă a uciderilor în timpul luptei analiza matematică dă efective, la început, 140 și 54 oameni, iar la finele luptei, 124 și 24.)

37. Considerînd că în datele problemei nu s-a strecurat nici o greșeală, deducem că numerele nu sînt scrise în sistemul zecimal. Fie x baza sistemului de numerație necunoscut.

În acest caz, numărul 84 înseamnă 8 unități de ordinul al doilea și 4 unități de ordinul întîi, adică:

$$„84“ = 8x + 4$$

$$„54“ = 5x + 4$$

Avem ecuația $8 \cdot 8 = 5x + 4$, ceea ce în sistemul zecimal înseamnă $64 = 5x + 4$, de unde $x = 12$.

Numerele sînt scrise deci în sistemul cu baza 12 și

$$„84“ = 8 \cdot 12 + 4 = 100.$$

Rezultă: dacă $8 \cdot 8 = „54“$, atunci $„84“ = 100$.

În mod analog se rezolvă problema: Cu ce este egal 100, cînd $5 \cdot 6 = 33$?

R. 81 (în sistemul de numerație cu baza 9).

38. Cîștigă lupta peștișorii-diavol în cel mult 6 minute.

O soluție: Faza I: 9 peștișori neutralizează 3 pești-rege,

4 „ ucid în 3 min. 1 pește-rege.

Faza II: 4 peștișori ucid în 3 min. 1 pește-rege,

4 „ „ „ 3 „ 1 „ „ ,

5 „ „ „ 2 min. și 24 s, 1 pește-rege.

39 R. $x = \sqrt[3]{3}$. Într-adevăr:

$$x^3 = (\sqrt[3]{3})^3 = 3 \text{ și prin urmare, } x^{x^3} = x^3 = 3.$$

40. Ridicînd ambele expresii la puterea a 10-a (egală cu c.m.m.c.m. al indicilor radicalilor), obținem:

$$(\sqrt[5]{5})^{10} = 5^2 = 25; \quad (\sqrt[4]{2})^{10} = 2^5 = 32; \quad \sqrt{2} > \sqrt[5]{5}.$$

41. Fie P și M punctele respective, P' și M' proiecțiile lor pe planul pardoselii. Desfășurînd figura din spațiu pe acest plan, punctele P , P' , M' , M sînt coliniare, deci traseul respectiv este minim: $T = 13 + 30 = 43$ p. $30,5 = 13,115$ m.

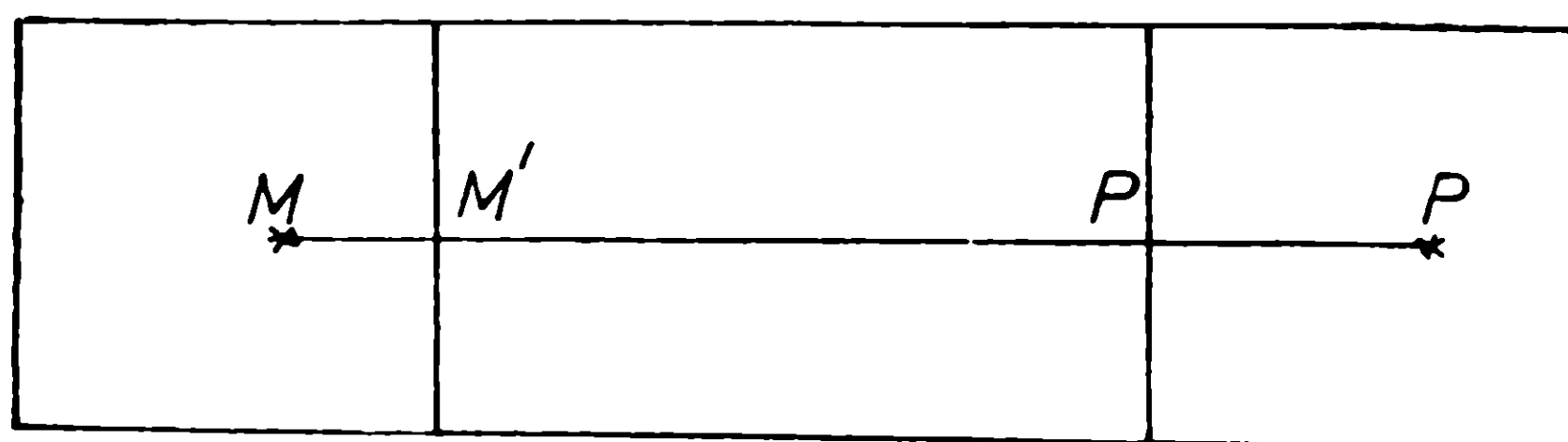
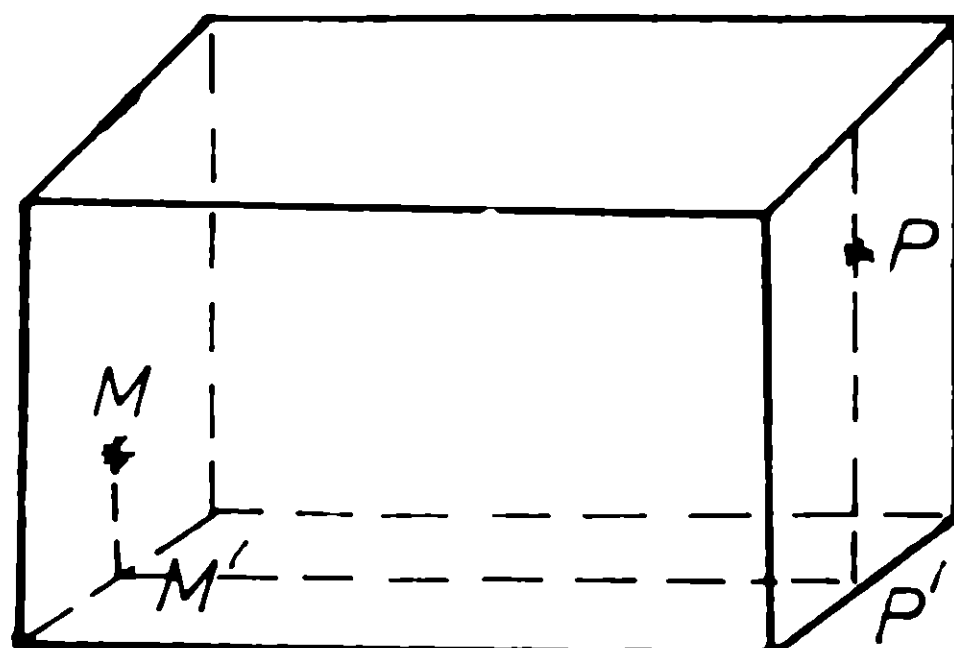


Fig. 51.

42. O variantă mai veche a acestei probleme, în care se făceau 6 împărțiri succesive ale nucilor de cocos, conducea la formarea a 6 ecuații nedeterminate. Dacă N reprezintă numărul inițial, F numărul primit de fiecare la împărțirea finală, cifrele 1 reprezentînd nucile de cocos rezervate maimuței, iar celelalte litere, un număr întreg pozitiv necunoscut, aceste ecuații se prezintă sub forma următoare:

$$N = 5A + 1$$

$$4A = 5B + 1$$

$$4B = 5C + 1$$

$$4C = 5D + 1$$

$$4D = 5E + 1$$

$$4E = 5F + 1$$

Prin metode algebrice unanim cunoscute aceste ecuații pot fi reduse ușor la următoarea ecuație diofantică cu două necunoscute: $1024N = 15625F + 11529$.

Această ecuație este greu de soluționat prin încercări; o soluție de o frumoasă simplitate se obține prin introducerea noțiunii de nuci de cocos negative. În general această enigmă diofantică (ecuație care se rezolvă în numere întregi) admite o infinitate de soluții în numere întregi. Sarcina noastră este de a găsi cel mai mic număr pozitiv.

În cazul problemei date, ecuația diofantică ce se obține este de forma: $256N = 3125F + 2101$. Avînd în vedere că $5^5 - 4 = 3121$ este cel mai mic număr

care va permite 5 împărțiri exacte ale nucilor de cocos, astfel încât maimuța să capete cîte una la fiecare împărțire, rezultă că soluția problemei este: 3121.

Constatăm că restul 1020 este divizibil prin 5, ceea ce permite a 6 împărțire, în care maimuța nu capătă nimic.

43. Punem $y^2=ab$ și $z^2=cd$, iar expresia devine $x=\sqrt{yz}$. Chestiunea se reduce la trei construcții de medii geometrice. Luăm pe o dreaptă, în sensuri

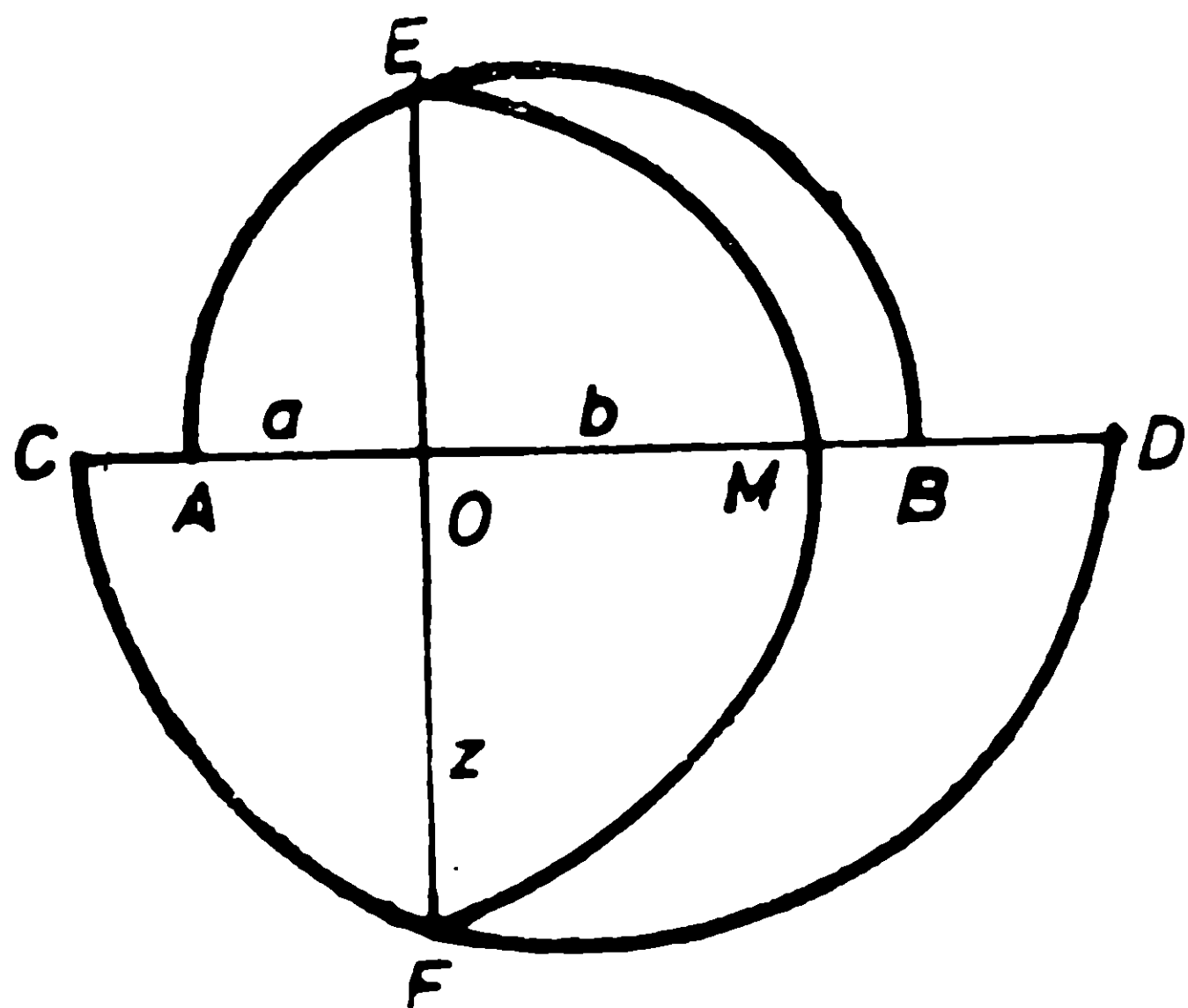


Fig. 52.

contrare, $OA=a$, $OB=b$, apoi tot în sensuri contrare $OC=c$, $OD=d$. Construim media geometrică $OE=y$ a segmentelor a , b , apoi media geometrică $OF=z$ a segmentelor c , d , în sens contrar cu OE .

În sfârșit, construim media geometrică OM a lui OE și OF, astfel: că:

$$OM = \sqrt{OE \cdot OF} = \sqrt{yz} = x.$$

Scriem expresia dată sub forma:

$$\begin{aligned}x &= \sqrt[4]{a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2b^2} = \\&= \sqrt[4]{(a^2 - b^2)^2 - 2a^2b^2},\end{aligned}$$

de unde $x = \sqrt[4]{(a^2 + b^2 - ab\sqrt{2})(a^2 + b^2 + ab\sqrt{2})}$.

Dacă punem acum $a^2 + b^2 - ab\sqrt{2} = y^2$ și $a^2 + b^2 + ab\sqrt{2} = z^2$,
atunci: $x = \sqrt{yz}$.

Pentru a determina pe y , ținând seama de teorema lui Pitagora generalizată, construim triunghiul OAB , cu laturile $OA=a$, $AB=b$, $\hat{A}=45^\circ$; deci $OB=y$.

Pentru a determina pe z , construim triunghiul OAC cu laturile $OA=a$, $AC=b$, $A=135^\circ$; rezultă $OC=z$. Urmează să construim media geometrică a segmentelor y și z . Pe dreapta OB luăm $OD=OC=z$.

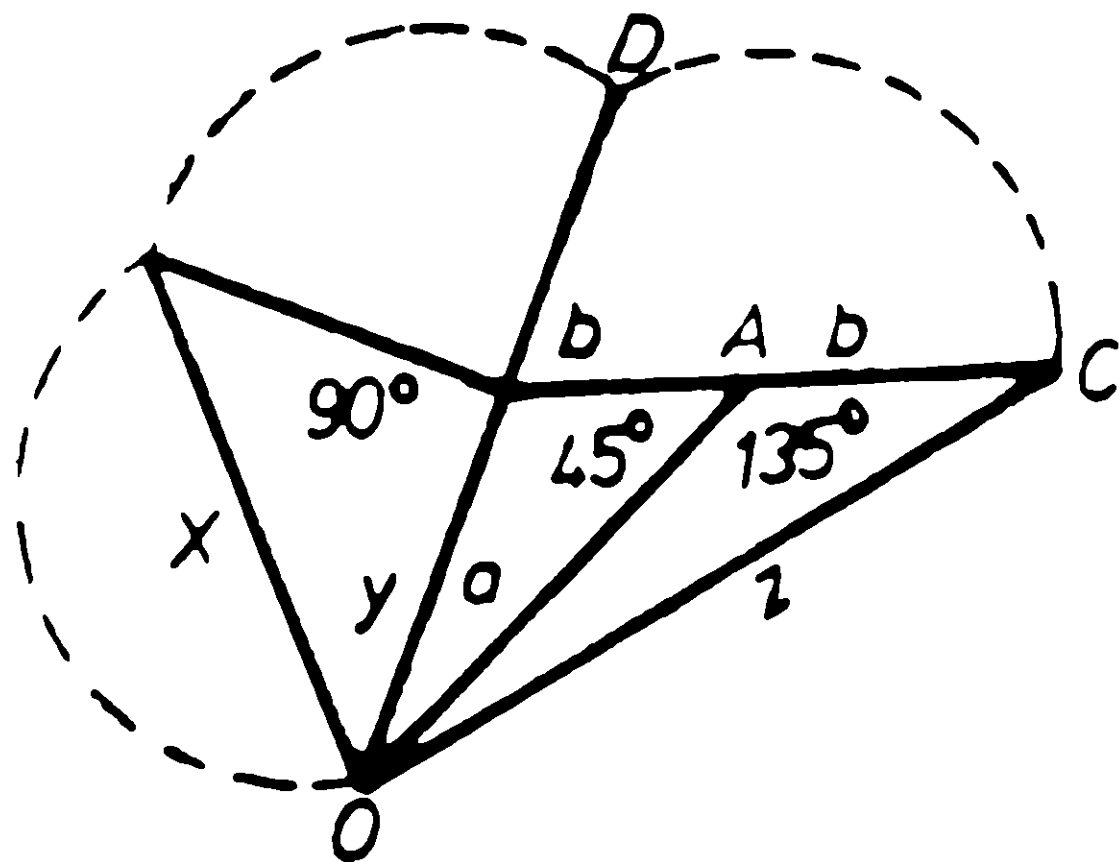


Fig. 53.

Pe OD ca diametru construim un semicerc, iar în B ridicăm o perpendiculară pe OD, care taie semicercul în punctul E. Deci $OE = \sqrt{yz} = x$.

44. Se execută operația corespunzătoare împărțirii unui cerc în 6 părți egale. Fie a, b, c, d, e, f arcele rezultate, avînd fiecare cîte 60° , M și P origina arcelor a și d. Se împarte apoi arcul b și d în două părți egale prin punctele N și R. Acestea se obțin construind în extremitățile lui b respectiv d arce de raze egale, urmărind ca intersecția acestora să se facă, în final,

pe arcul respectiv. Vezi și problema 23 pag. 183.

45. Problema se poate reformula astfel: Dacă P , Q , P' , Q' , P'' , Q'' sînt punctele de trisecțiune ale laturilor BC , CA , AB iar triunghiurile PQR ,

$P'Q'R'$, $P''Q''R''$ sînt echilaterale, atunci triunghiul $RR'R''$ este echilateral (vezi fig. 54).

Folosim pentru rezolvare o metodă vectorială cu coordonate în planul complex.

$$\text{Fie } \overline{BC} = \overline{p}, \overline{CA} = \overline{q}, \overline{BA} = \overline{p} + \overline{q}$$

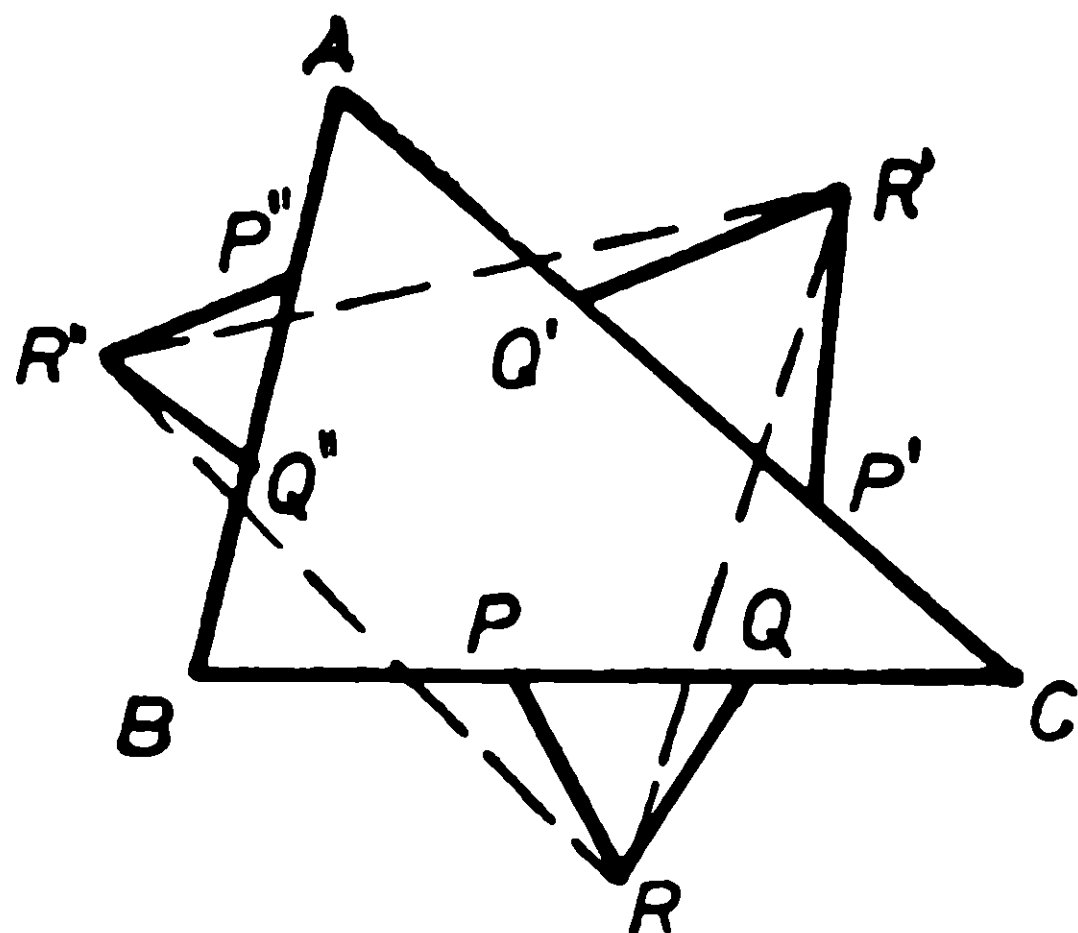


Fig. 54.

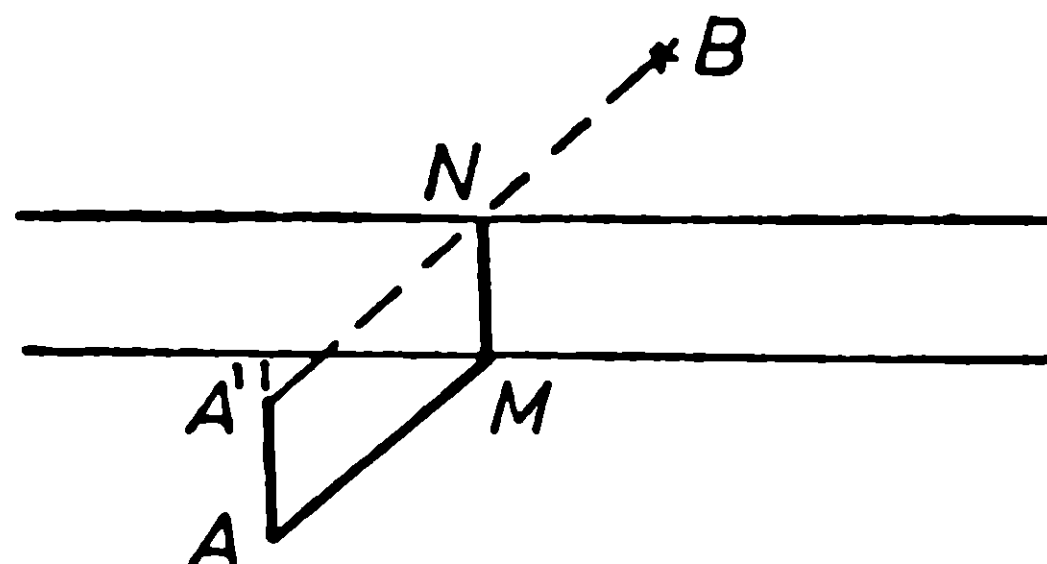


Fig. 55.

$$\begin{aligned} \text{Atunci } \overline{RR'} &= -\frac{\overline{p}\omega^2}{3} + \frac{\overline{p} + \overline{q}}{3} - \frac{\overline{q}\omega}{3} \text{ (în conturul poligonal RQPR). } \overline{R'R''} = \\ &= -\frac{\overline{q}\omega^2}{3} + \frac{\overline{q}}{3} - \frac{\overline{p}}{3} - \frac{\overline{q}}{3} + \frac{(\overline{q} + \overline{q})\omega}{3} = -\frac{\overline{p}}{3} + \frac{(\overline{p} + \overline{q})\omega}{3} - \frac{\overline{q}\omega^2}{3}; \quad \overline{RR''} = \frac{(\overline{p} + \overline{q})\omega^2}{3} - \\ &- \frac{\overline{p} + \overline{q}}{3} + \frac{\overline{p}}{3} - \frac{\overline{p}\omega}{3} = -\frac{\overline{q}}{3} - \frac{\overline{p}\omega}{3} + \frac{(\overline{p} + \overline{q})\omega^2}{3} \text{ astfel că } \overline{R'R''} = (\overline{RR'})\omega^2 \text{ și } \overline{R'R} = \\ &= (\overline{R'R''})\omega \text{ ceea ce demonstrează că triunghiul } RR'R'' \text{ este echilateral}^1. \end{aligned}$$

Problemă analogă: Pe laturile unui paralelogram se construiesc în exterior pătrate. Să se arate că centrele acestora sînt vîrfurile unui nou pătrat. (Rezolvare obișnuită.)

46. Raportul dintre raza unei monede și raza fundului farfuriei $\frac{r}{R} = \frac{1}{10}$:

Raportul dintre ariile respective este $\frac{r^2}{R^2} = \frac{1}{100}$; 10 monede vor acoperi $\frac{1}{10}$ sau 10% din suprafața farfuriei.

47. Primului inginer i se poate repartiza 3 sonde în $C_9^3 = 84$ moduri. Celui de-al doilea inginer, la fiecare repartizare a primului îi corespund $C_6^3 = 20$ de moduri. Deci pînă acum avem: $C_9^3 \cdot C_6^3 = 84 \cdot 20 = 1\,680$ de moduri.

Celui de al treilea inginer, la o repartizare a primilor doi îi corespunde $C_3^3 = 1$ mod.

În total avem $C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = 1\,680$ moduri de repartizare.

48. Se duce prin A o perpendiculară pe malul rîului, se poartă pe ea un segment AA' egal cu lățimea rîului, apoi se duce prin A o paralelă la A'B.

49.
$$V_S = \frac{V_{cil} + V_{con}}{2} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

¹ Problema se poate rezolva și prin compunerea rotațiilor.

50. a) Descompunem un pătrat cu latura $a+b$ în 4 părți, așa cum se arată în figura 56 a. Calculînd aria pătratului întreg și ariile părților, obținem:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

b) Tăiem dreptunghiul de sus din prima figură (b) și-l așezăm lîngă cel de jos ca în figura a doua (b₂).

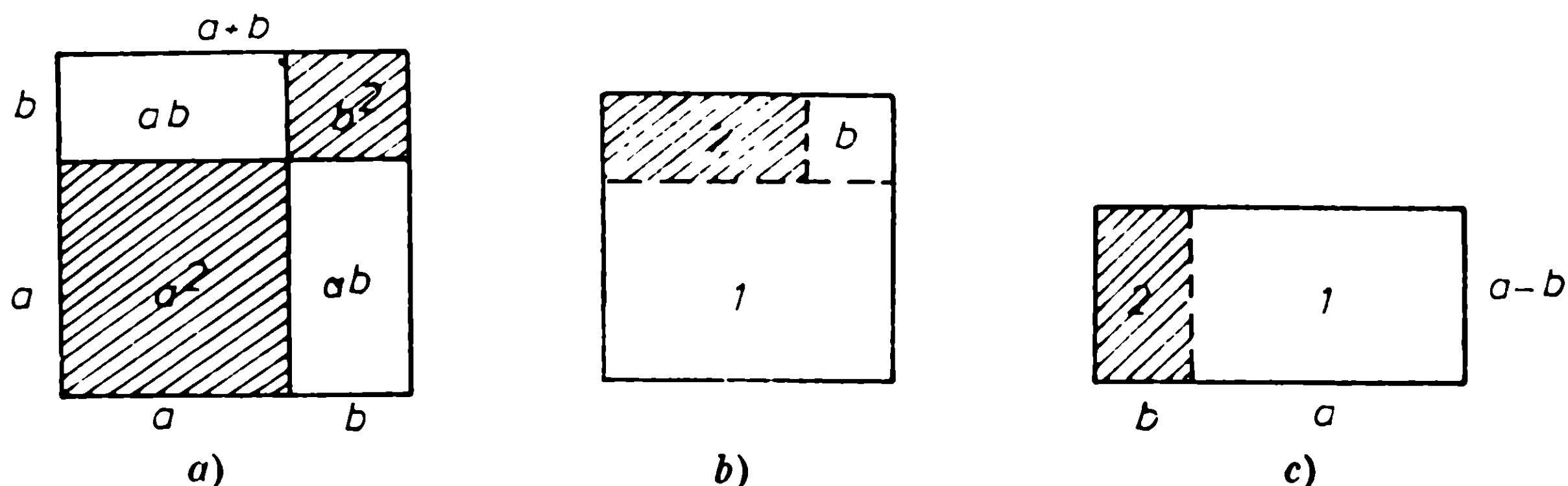


Fig. 56.

Calculînd ariile celor două figuri, găsim:

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

51. La a 3-a îndoitură ar avea de 8 ori grosimea, la a 6-a, de 64 ori grosimea și în general $0,0001 \text{ m} \cdot 2^{50}$, ceea ce reprezintă un număr foarte mare.

Numai la a 30-a îndoire hîrtia ar avea grosimea pămîntului; de unde rezultă că este imposibil să îndoim o coală de 50 de ori, chiar dacă am dispune de o coală cu dimensiuni corespunzătoare.

52. Cele 3 puncte P_1, P_2, P_3 sînt vîrfurile unui triunghi înscris în cercul a cărui egalitate cu cele 3 cercuri date trebuie s-o demonstrăm.

Dacă vom reuși să găsim un triunghi egal cu acesta și de care să fim siguri că se poate înscrie într-un cerc cu raza egală cu a celor 3 cercuri date, problema este rezolvată.

Observăm (fig. 57) că distanțele de la P_0 la O_1, O_2 și O_3

sînt egale cu razele R ale unor cercuri egale. Deci P_0 este centrul cercului care trece prin O_1, O_2 și O_3 și are raza egală cu razele celor 3 cercuri date. Rezultă că triunghiul $O_1O_2O_3$ este inscriptibil în cercul cu raza R .

Să însemnăm cu a, b , și c , mărimea celor trei arce pe care le limitează punctele P_0, P_1, P_2 și P_3 pe cele trei cercuri date.

Ținem seama că în două cercuri secante linia centrelor împarte coarda comună și arcele corespunzătoare în părți egale. Considerînd triunghiul $O_1O_2O_3$, ale cărui laturi sînt liniile centrelor celor 3 cercuri, vom avea:

$$O_1 + O_2 + O_3 = 180^\circ = \frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2} = a+b+c$$

Figura $O_2P_1O_3P_0$, fiind un patrulater cu laturile egale cu razele cercurilor egale, este un romb. În acest romb, unghiurile O_2 și O_3 au ca măsură arcul b . Să găsim și măsura unghiurilor P_1 și P_0 . Am arătat că $a+b+c=180^\circ$. Suma unghiurilor unui romb fiind 360° , se poate spune că ea este egală cu $2(a+b+c)$.

Cum suma unghiurilor din O_2 și O_3 este $2b$, rezultă că suma celorlalte două unghiuri, din P_1 și P_0 , este: $360^\circ - 2b = 2(a+c)$.

Dar unghiurile P_1 și P_0 sînt egale (opuse în romb), deci $P_1 = P_0 = \frac{2(a+c)}{2} = a+c$. La fel putem stabili că unghiul $P_2 = a+b$ și unghiul $P_3 = b+c$.

Considerăm acum triunghiurile $O_2P_1O_3$ și $P_2O_1P_3$. Sînt egale deoarece au: $O_2P_1 = P_1O_3 = P_2O_1 = O_1P_3$ ca raze de cercuri egale; iar $O_2P_1O_3 = P_2O_1P_3$, deoarece au aceeași măsură: $a+c$.

Triunghiurile fiind egale rezultă că laturile lor sînt egale adică $O_2O_3 = P_2P_3$. La fel demonstrăm că $O_1O_2 = P_1P_2$ și $O_1O_3 = P_1P_3$.

Dacă de data aceasta comparăm triunghiurile $O_1O_2O_3$ și $P_1P_2P_3$, observăm că în conformitate cu demonstrația de mai sus, ele au laturile egale; deci aceste triunghiuri sînt egale.

Prin urmare și cercul care trece prin $P_1P_2P_3$ va avea raza egală cu R , concluzie la care se ajunsese inițial pe cale experimentală. Este interesant că, ulterior, s-au găsit soluții mult mai simple:

A doua soluție: Avem $P_1O_1 = P_1O_2 = P_2O_1 = P_2O_3 = P_3O_2 = P_3O_3 = P_0O_1 = P_0O_2 = P_0O_3 = R$. Rezultă că patrulateralele $P_1O_1P_0O_2$, $P_2O_1P_0O_3$, $P_3O_2P_0O_3$ sînt romburi. Deci $P_1O_1 \parallel P_0O_2$ și $P_3O_3 \parallel P_0O_2$; deci $P_1O_1 \parallel P_3O_3$ și, deoarece $P_1O_1 = P_3O_3 = R$, rezultă că patrulaterul $P_1O_1O_3P_3$ este paralelogram. Deducem că $P_1P_3 = O_1O_3$ și analog, $P_1P_2 = O_2O_3$, $P_2P_3 = O_1O_2$. Deci $\triangle P_1P_2P_3 = \triangle O_1O_2O_3$.

Deoarece $P_0O_1 = P_0O_2 = P_0O_3 = R$, rezultă că cercul circumscris triunghiului $O_1O_2O_3$ are centrul în punctul P_0 și raza R și deci este egal cu cercurile date. Pe de altă parte, cercul circumscris triunghiului $P_1P_2P_3$ este egal cu cercul circumscris triunghiului $O_1O_2O_3$ și concluzia este evidentă.

A treia soluție (Eugen Rusu):

Deoarece P_1 este simetricul lui P_0 față de O_2O_3 , analog P_2 și P_3 , rezultă că $P_1P_2 = 2P'_1P'_2 = O_1O_2$ (P'_1 , P'_2 mijloacele laturilor). Triunghiurile $O_1O_2O_3$ și $P_1P_2P_3$ sînt egale.

53. Notez: x = viteza apei;

y = viteza reală a înotătorului ($y > x$),

$y - x$ și $y + x$ = viteze relative;

t = timpul în care plosca parcurge distanța dintre poduri:

$$t = \frac{2}{x};$$

t_1 = timpul cît mai merge înotătorul împotriva curentului:

$$t_1 = 20' = \frac{1}{3} \text{ ore};$$

t_2 = timpul parcurs înapoi de înotător:

$$t_2 = \frac{2 + \frac{1}{3}(y-x)}{y+x}.$$

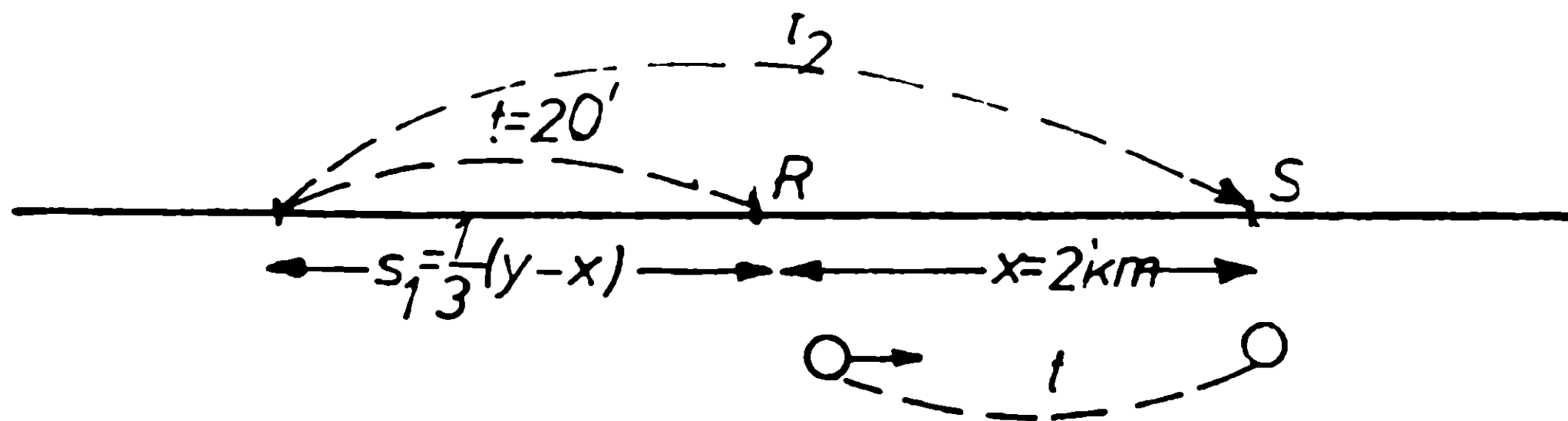


Fig. 58.

Ecuția: $t = t_1 + t_2$

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{3} + \frac{2 + \frac{1}{3}(y-x)}{y+x}$$

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{3} + \frac{6+y-x}{3(x+y)}$$

$$6x + 6y = x^2 + xy + 6x + xy - x^2$$

$$6y - 2xy = 0; y(6 - 2x) = 0$$

y nu poate fi zero, deci $6 - 2x = 0$; $x = 3$ km/oră.

Avînd o singură ecuație și două necunoscute, y este nedeterminat, servind ca o necunoscută auxiliară pentru determinarea lui x .

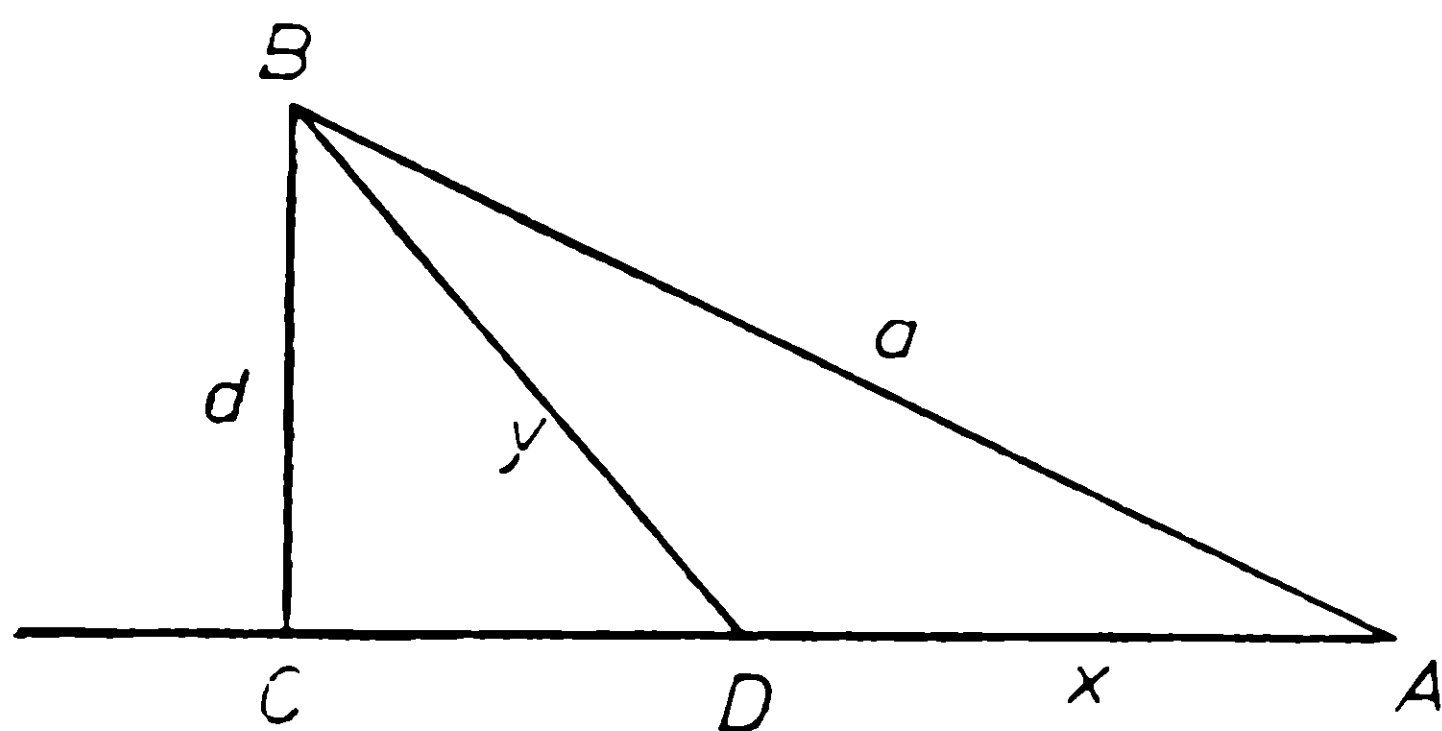


Fig. 59.

54. Fie D punctul în care trebuie să se facă stația în condițiile cerute de problemă.

$$x = AC - CD = \sqrt{a^2 - d^2} - \sqrt{y^2 - d^2}$$

Traiectul mărfurilor se compune din șoseaua BD și calea ferată DA.

Cu banii plătiți pentru transportul mărfii pe șoseaua $BD = y$ se poate merge pe calea ferată pe o distanță egală cu $2y$. Deci costul mărfii pe traseul mixt ADB este egal cu costul mărfii pe distanța $(x + 2y)$ de pe calea ferată, adică pe distanța:

$$1) z = \sqrt{a^2 - d^2} = \sqrt{y^2 - d^2} + 2y$$

Costul mărfii pe acest drum va fi cel mai mic — evident — cînd drumul va fi cel mai mic. Deci trebuie să aflăm minimul distanței z din relația (1).

Cantitatea $\sqrt{a^2 - d^2}$ fiind constantă, minimul depinde de cantitatea $2y - \sqrt{y^2 - d^2}$.

Notăm: $2y - \sqrt{y^2 - d^2} = m$ și avem:

$$2y - m = \sqrt{y^2 - d^2}; \quad 3y^2 - 4my + m^2 + d^2 = 0.$$

Condiția ca y să fie real este următoarea:

$$4m^2 - 3m^2 - 3d^2 \geq 0; \quad m \geq d\sqrt{3}$$

Minimul lui m este $d\sqrt{3}$. Rezultă $y = \frac{2d\sqrt{3}}{3}$

$$x = \sqrt{a^2 - d^2} - \frac{d\sqrt{3}}{3}; \quad x = \sqrt{200^2 - 87^2} - \frac{87\sqrt{3}}{3} \simeq 130 \text{ km.}$$

55. I cu II : c.m.m.c.m. $6 \cdot 5 = 30$ zile

I cu II : „ „ „ „ „ $= 3 \cdot 10 = 30$ „

II cu III: „ „ „ „ „ $= 10$ zile

I cu II cu III: c.m.m.c.m. $= 2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ zile.

56. Ducem prin punctul A o paralelă la CC_1 , prin B o paralelă la AA_1 , și prin C una la BB_1 .

Se formează triunghiul GHK (fig. 60).

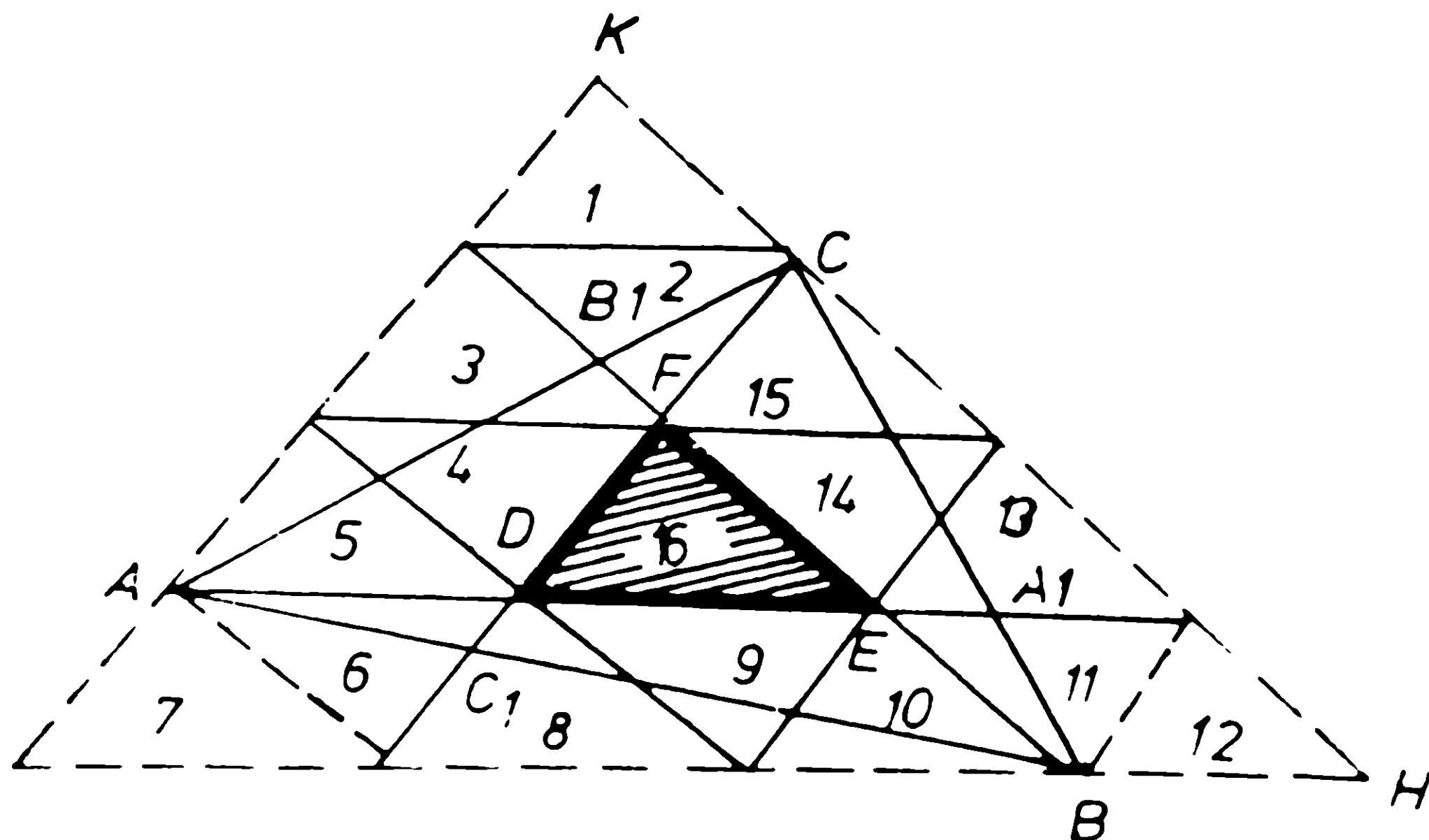


Fig. 60.

Prin punctele A și D ducem câte o paralelă la BB_1 , prin B și E câte o paralelă la CC_1 și prin C și F câte o paralelă la AA_1 .

Triunghiul GHK s-a împărțit astfel într-un număr de 16 triunghiuri, inclusiv triunghiul hașurat, pe care le numerotăm cu 1 ... 16.

Toate aceste 16 triunghiuri sînt egale între ele deoarece au laturile egale cu segmente de drepte paralele cuprinse între paralele.

Acum, dacă dăm la o parte triunghiurile 1, 7 și 12, rămîne figura ALBMCN, care conține paralelogramele ADCN, ALBE și BMCF și triunghiul hașurat.

Fiecare din aceste paralelograme conține cîte 4 triunghiuri din cele 16. Laturile triunghiului dat ABC fiind diagonale la aceste paralelograme împart suprafețele lor în cîte două părți egale. Prin urmare în interiorul triunghiului ABC rămîne triunghiul hașurat împreună cu jumătate din suprafețele celor 3 paralelograme.

Deci, însemnînd cu S suprafața triunghiului ABC și cu s suprafața unuia din cele 16 triunghiuri egale, vom avea:

$$S = \left(1 + 3 \cdot \frac{4}{2}\right)s; \quad S = 7s, \text{ de unde } s = \frac{S}{7}.$$

57. Lungimea $AMCNDPB = \frac{\pi}{2}(AC + CD + DB) = \frac{\pi}{2}AB$, deci lungimea conturului este $2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot AB = 6\pi$; iar aria este:

$$\frac{9\pi}{2} + \frac{\pi}{8} + \frac{2,25\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 5 \frac{3}{8}\pi.$$

58. Din B ca centru, cu raza BC, descriem un arc de cerc CM. Luăm punctul O (mijlocul segmentului AM) și cu raza OA descriem un semicerc, care este întîlnit de prelungirea laturii BC în punctul E. BE este latura pătratului căutat. Într-adevăr, în triunghiul dreptunghic AEM, înălțimea EB este medie proporțională între segmentele determinate pe ipotenuză, iar acestea sînt tocmai laturile dreptunghiului dat. Deci: $EB^2 = AB \cdot BC$.

59. Arcele AE și EF sînt racordate deoarece centrele celor două cercuri cărora le aparțin arcele se află pe dreapta care trece prin punctul de racordare și este perpendiculară pe tangenta comună acestor arce ($AEC = CEF$; $AEM = FEN$).

În cazul cînd $AC = DB = CD$, arcele nu se mai racordează, deoarece $AEC = CEF$.

60. Fie R raza sferei, $r = \sqrt{R^2 - 9}$, raza cilindrului, iar $h = R - 3$ înălțimea calotelor sferice de la fiecare capăt al cilindrului. Pentru a determina ce rămîne după îndepărtarea cilindrului și a calotelor, scădem din volumul sferei: $\frac{4\pi R^3}{3}$,

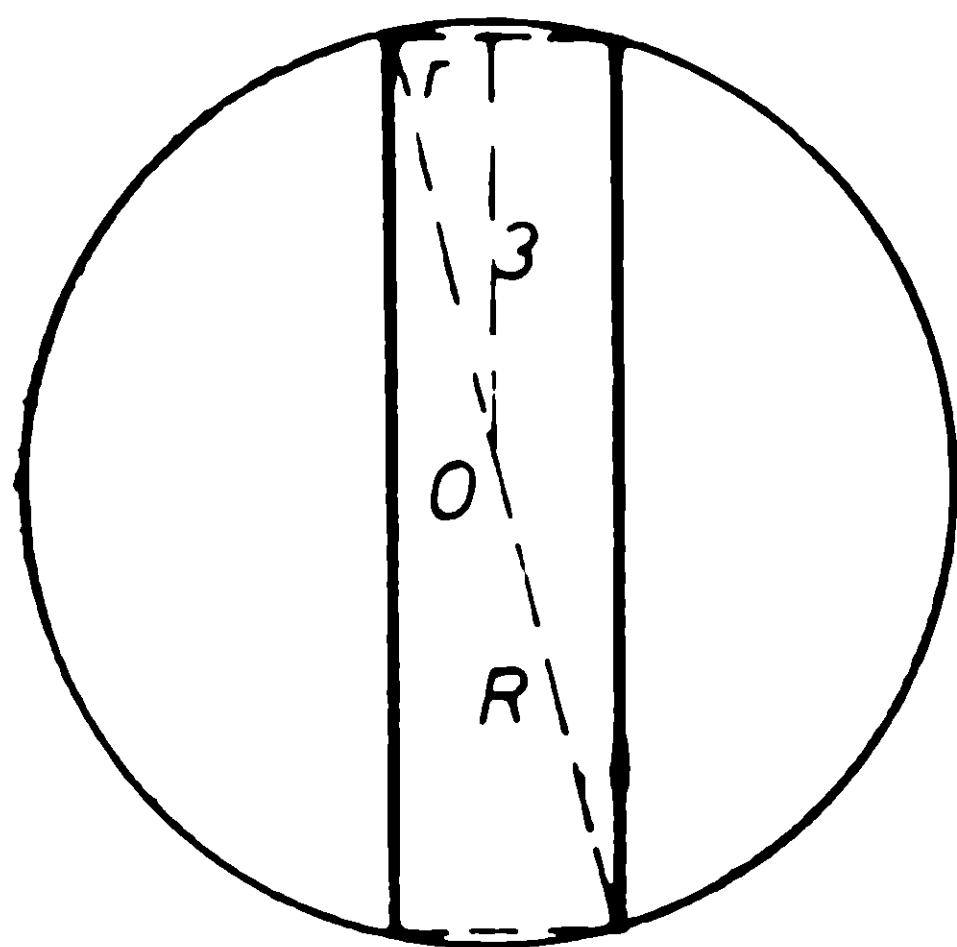


Fig. 61.

$$V \cdot \text{cil} = 6\pi(R^2 - 9) + 2V \cdot c \cdot \text{sf} = \pi \frac{h(3r^2 + h^2)}{6}.$$

Efectuînd acest calcul toți termenii dispar (se reduc) cu excepția lui 36π , care este tocmai volumul a ceea ce rămîne din sferă exprimat în țoli cubi. Cu alte cuvinte, restul este constant, indiferent de diametrul găurii sau de

mărimea sferei, întrucît din relația $r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$ rezultă: cînd r crește l descrește și invers.

61. Se observă că centrele a trei cercuri egale și tangente două cîte două sînt vîrfurile unui triunghi echilateral. Rezultă că arcul $MN = 60^\circ$, deci vor fi 6 cercuri tangente cu O și între ele.

62. a) Un cerc concentric cu cercul dat, de raza $R+r$, ce se continuă cu o dreaptă tangentă la cercul generat și paralelă cu tangenta pe care se rostogolește cercul O_1 .

b) Punctul M descrie epiciclopedia compusă din arcele MM_1, M_1M_2, M_2M_3 , ce se continuă cu cicloida compusă din arcele M_3M_4, M_4M_5 etc.

Cicloida este curba descrisă de un punct al periferiei unui cerc, care se rostogolește fără alunecare pe o dreaptă fixă.

Dacă baza de rostogolire e un cerc, curba descrisă de un punct al cercului mobil se numește *epicicloidă*, cînd rostogolirea are loc în exterior și *ipocicloidă*, cînd rostogolirea are loc în interior.

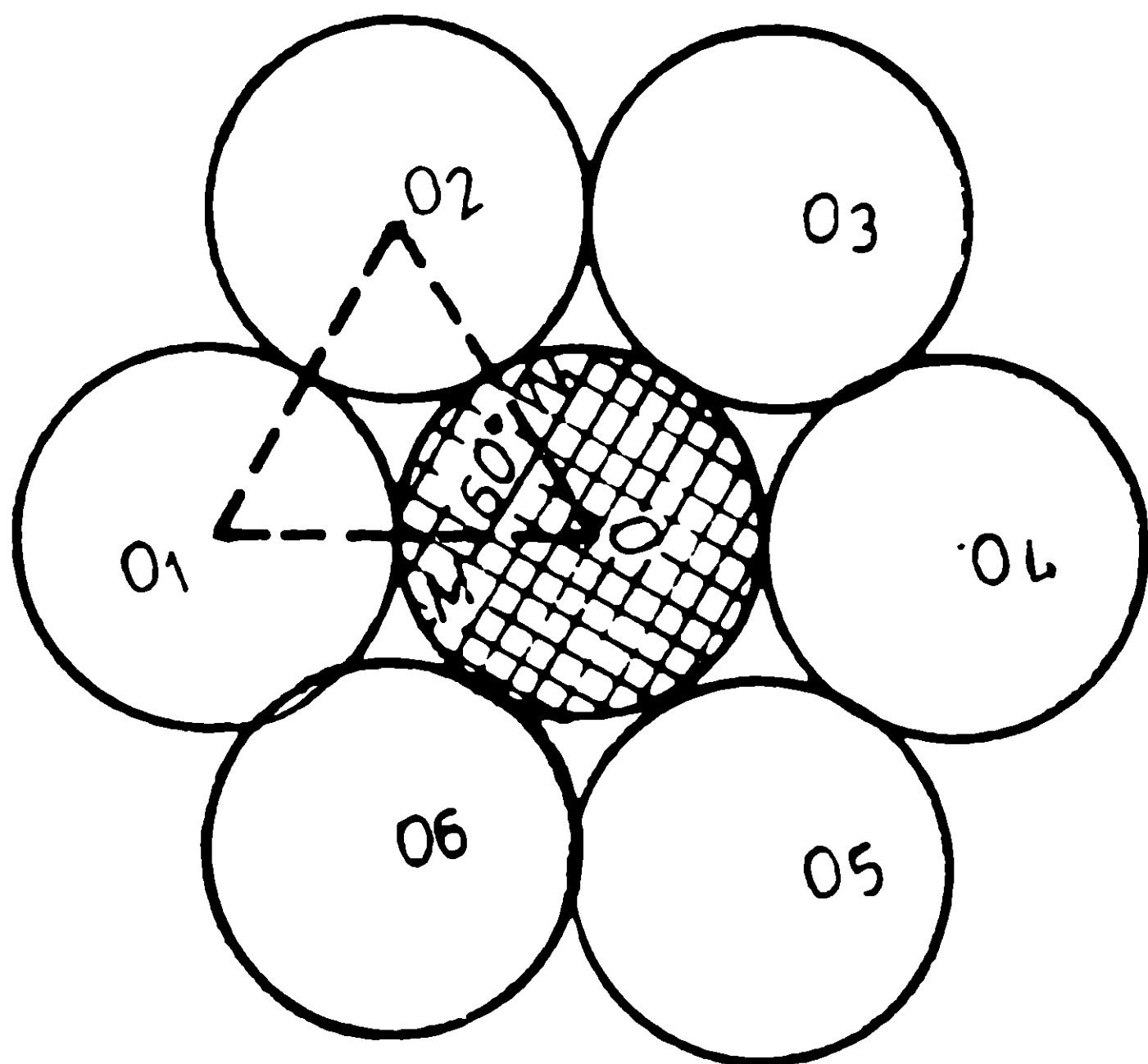


Fig. 62.

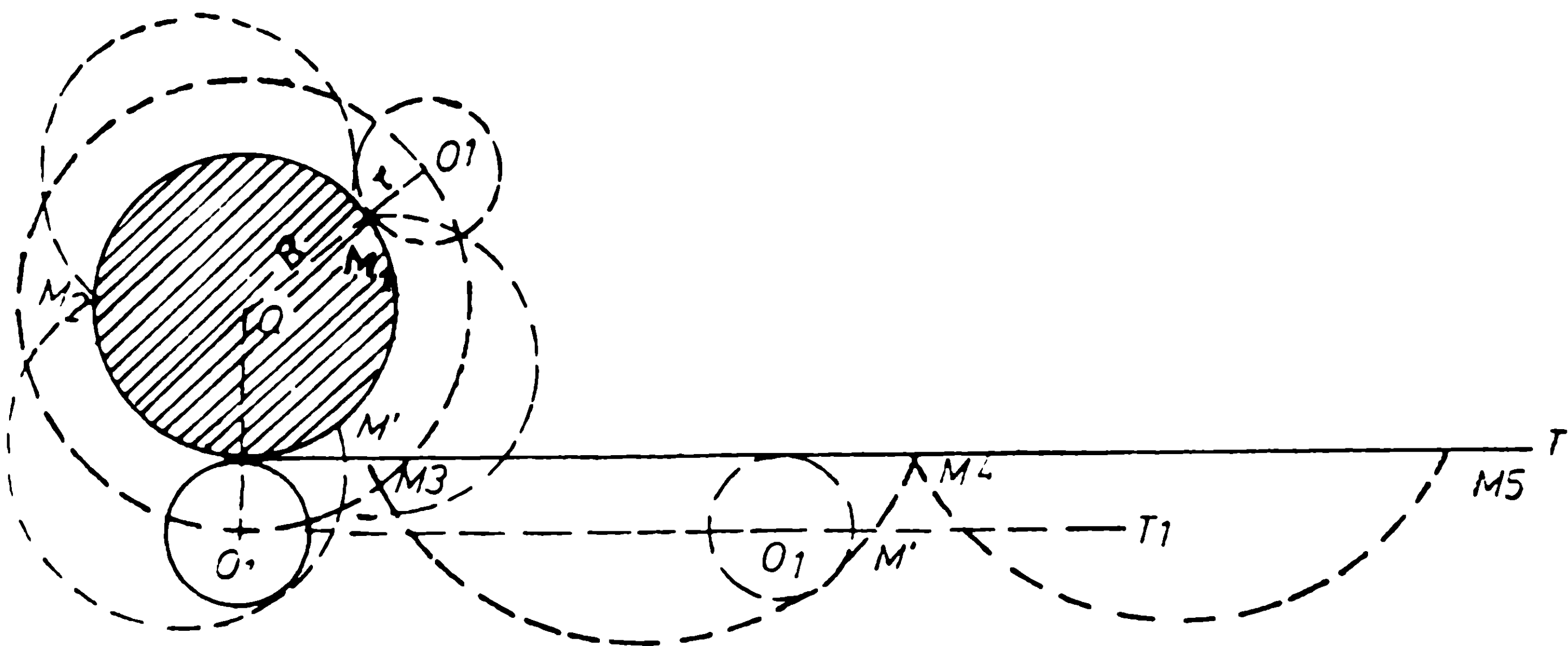


Fig. 63.

63. Fie H' și G' simetricele lui H și G , respectiv față de șoseaua cea mai apropiată de fiecare din ele.

Dreapta $H'G'$ taie șoselele în punctele A și B căutate (A se află pe șoseaua cea mai apropiată de H).

Vom arăta că: $HA + AB + BG = H'G'$. Într-adevăr: $HA = AH'$; $AB =$ segment comun, iar $BG = BG'$. Dar segmentul $H'G'$ reprezintă drumul cel

mai scurt dintre două puncte, deci și suma distanțelor $HA + AB + BG$ este minimă; rezultă că orice altă așezare a punctelor A și B duce la o lungime mai mare decât HG.

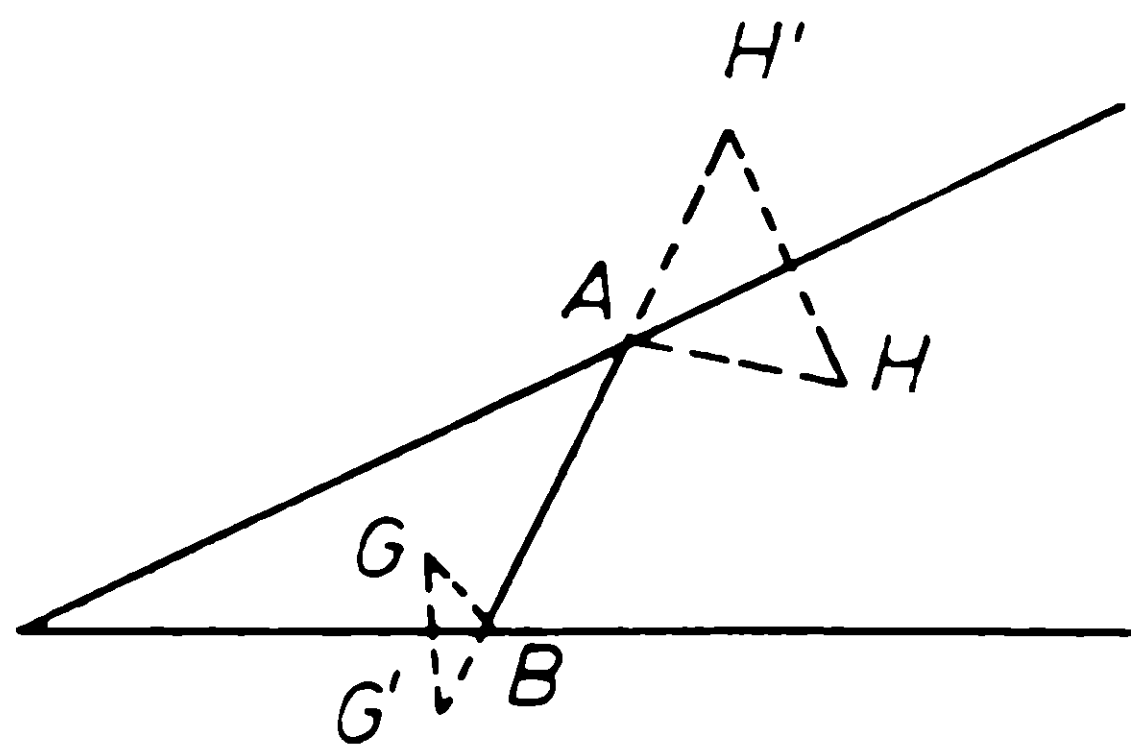


Fig. 64.

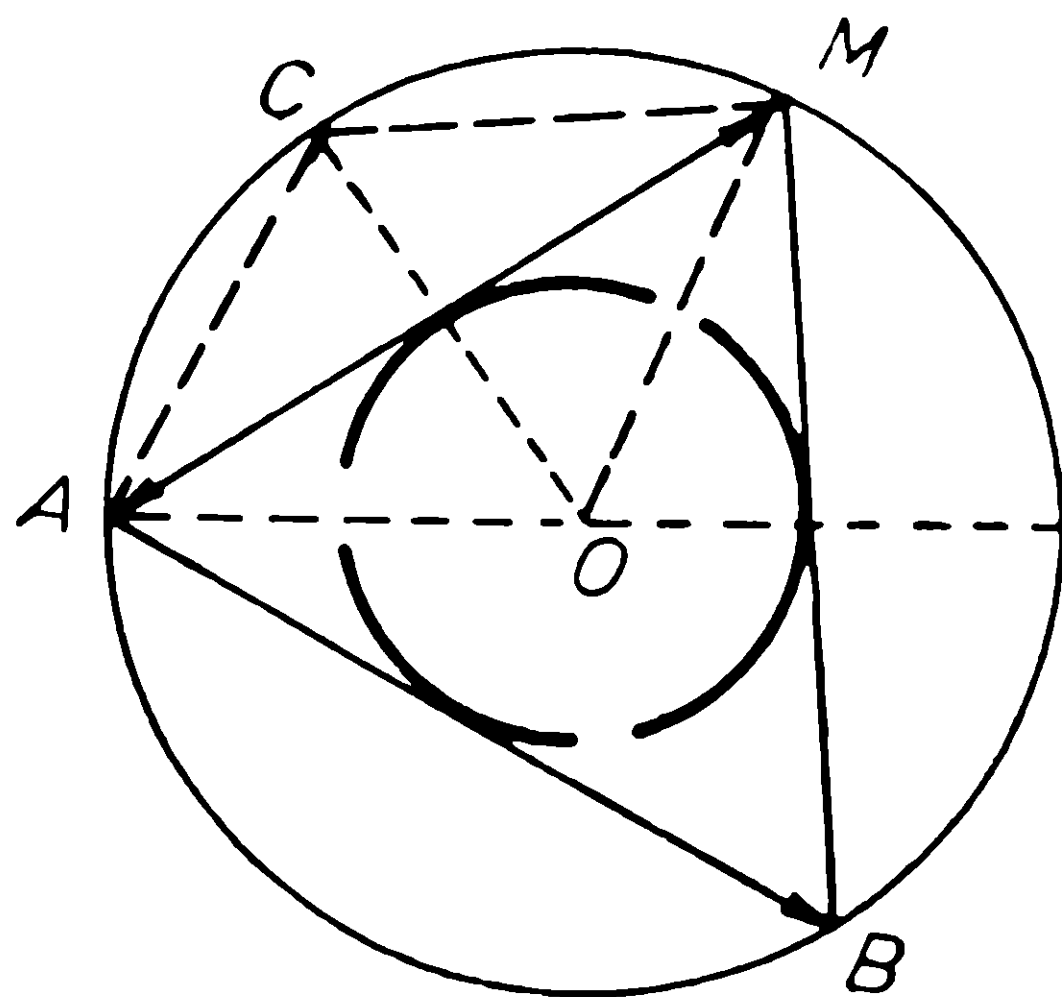


Fig. 65.

64. Din datele problemei rezultă egalitatea segmentelor: $MA = AA' = AB' = BB'$ (OA, perpendiculară pe coardă, împarte coarda în două părți egale).

Raza OA întâlnește cercul mare în punctul C pe care-l unim cu A și M. Prin ipoteză $OA = AC = r$.

Patrulaterul OMCA, avînd diagonalele perpendiculare și tăiate în părți egale, este romb; $CA = CM = OA = OM$.

Rezultă: arc $AC = 60^\circ$, arc $MCA = 120^\circ$.

La fel: arc $AB = 120^\circ$; deci arc $BM = 120^\circ$. Triunghiul MAB este echilateral.

Perpendiculara din A pe MB trece prin centrul O și ajunge în mijlocul D al lui BM și mijlocul E al cercului BM.

Arc $ME = \text{arc } EB = 60^\circ$; $ME = EB = R$.

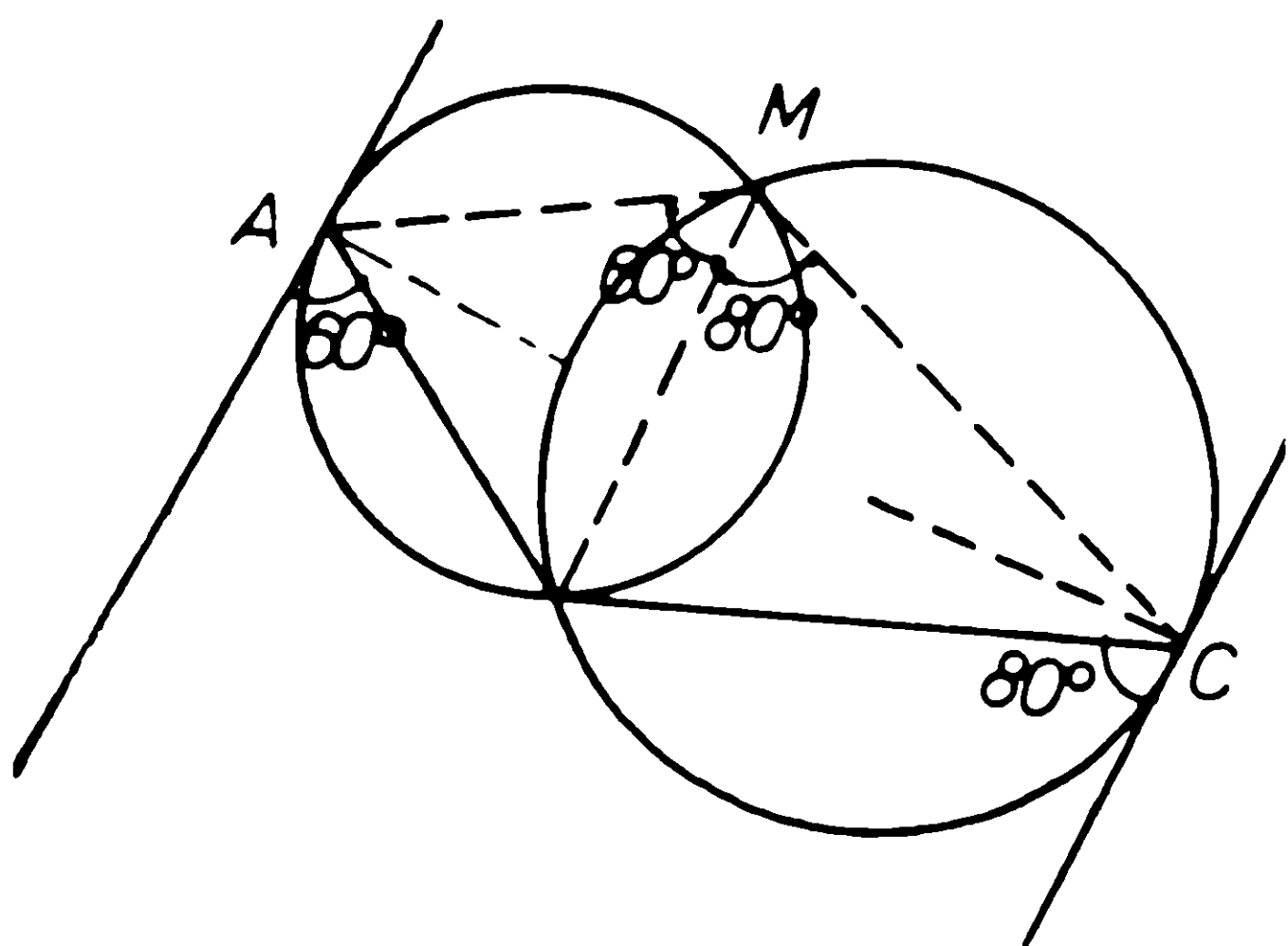


Fig. 66.

Patrulaterul MEBO este romb. Deci $OD = DE$; $OD = r$. Rezultă că MB este perpendiculară în punctul D pe raza OD, deci tangenta dusă din B la cercul mic trece prin M.

65. Punctul M se va afla pe arcul de cerc descris pe AB, capabil de un unghi de 60° și pe arcul de cerc descris pe BC, capabil de un unghi de 80° , deci la intersecția acestor două arce de cerc.

66. a) Notăm cu $S_1, S_2, \dots$ ariile fișiiilor.

$$S_1 = \frac{\pi a^2}{8} - \frac{\pi a^2}{8n^2} (n^2 - 2n + 1) + \frac{\pi a^2}{8n^2} = \frac{\pi a^2}{8n^2} (n^2 - n^2 + 2n - 1 + 1) =$$

$$= \frac{\pi a^2 \cdot 2n}{8n^2} = \frac{\pi a^2}{4n}$$

$$S_2 = \frac{\pi a^2}{8n^2} (n^2 - 2n + 1) + \frac{\pi a^2}{8n^2} (n^2 - 4n + 4) + \frac{\pi a^2}{2n^2} - \frac{\pi a^2}{8n^2} =$$

$$= \frac{\pi a^2}{8n^2} (n^2 - 2n + 1 - n^2 + 4n - 4 + 4 - 1) = \frac{\pi a^2}{8n^2} \cdot 2n = \frac{\pi a^2}{4n}.$$

Rezultă:

$$S_1 = S_2 = S_3 = \dots = S_n$$

b) Notăm cu $P_1, P_2, \dots, P_n$ perimetrele fișilor $S_1, S_2, \dots, S_n$.

$$P_1 = \frac{\pi a}{2} + \frac{\pi}{2} \left(a - \frac{a}{n} \right) +$$

$$+ \pi \cdot \frac{a}{2n} (n + n - 1 + 1) = \pi a.$$

$$P_2 = \frac{\pi a}{2n} (n - 1) + \frac{\pi a}{2n} + \frac{\pi a}{n} +$$

$$+ \frac{\pi a}{2n} (n - 2) = \frac{\pi a}{2n} (n - 1 + 1 + 2 +$$

$$+ n - 2) = \pi a;$$

deci $P_1 \equiv P_2 \equiv P_3 \equiv \dots \equiv P_n$

67. Unghiurile u și v au $AE \perp DE$. Dacă și $AF \perp BE$, ele trebuie să fie egale. Problema se reduce la demonstrarea $u = v$.

$$\text{În triunghiul } AEF \text{ (dr), } \operatorname{tg} u = \frac{EF}{AE} = \frac{\frac{DE}{2}}{DE \cdot \operatorname{tg} C} = \frac{1}{2 \operatorname{tg} C}.$$

$$\text{În triunghiul } BDE, \frac{BD}{\sin V} = \frac{DE}{\sin B_1}; \quad BD =$$

$$= DC = \frac{DE}{\sin C}.$$

$$\text{Înlocuind rezultă: } \sin v = \frac{\sin B_1}{\sin C} \quad (1)$$

$$\text{În triunghiul } ECB, \frac{BC}{\sin B_1} = \frac{2CD}{\sin (90^\circ + v)}; \quad EC =$$

$$= DE \operatorname{ctg} C.$$

$$\text{Înlocuind în relația precedentă, rezultă: } \sin B_1 =$$

$$= \frac{\cos C \cos V}{2} \text{ care introdus în (1) conduce la}$$

$$\text{rezultatul } \sin V = \frac{\cos C \cos V}{2 \sin C}, \quad \operatorname{tg} V = \frac{\cos C}{2 \sin C} = \frac{1}{2 \operatorname{tg} C}, \text{ de unde tragem con-}$$

$$\text{cluzia } u = v \text{ și } BE \perp AF.$$

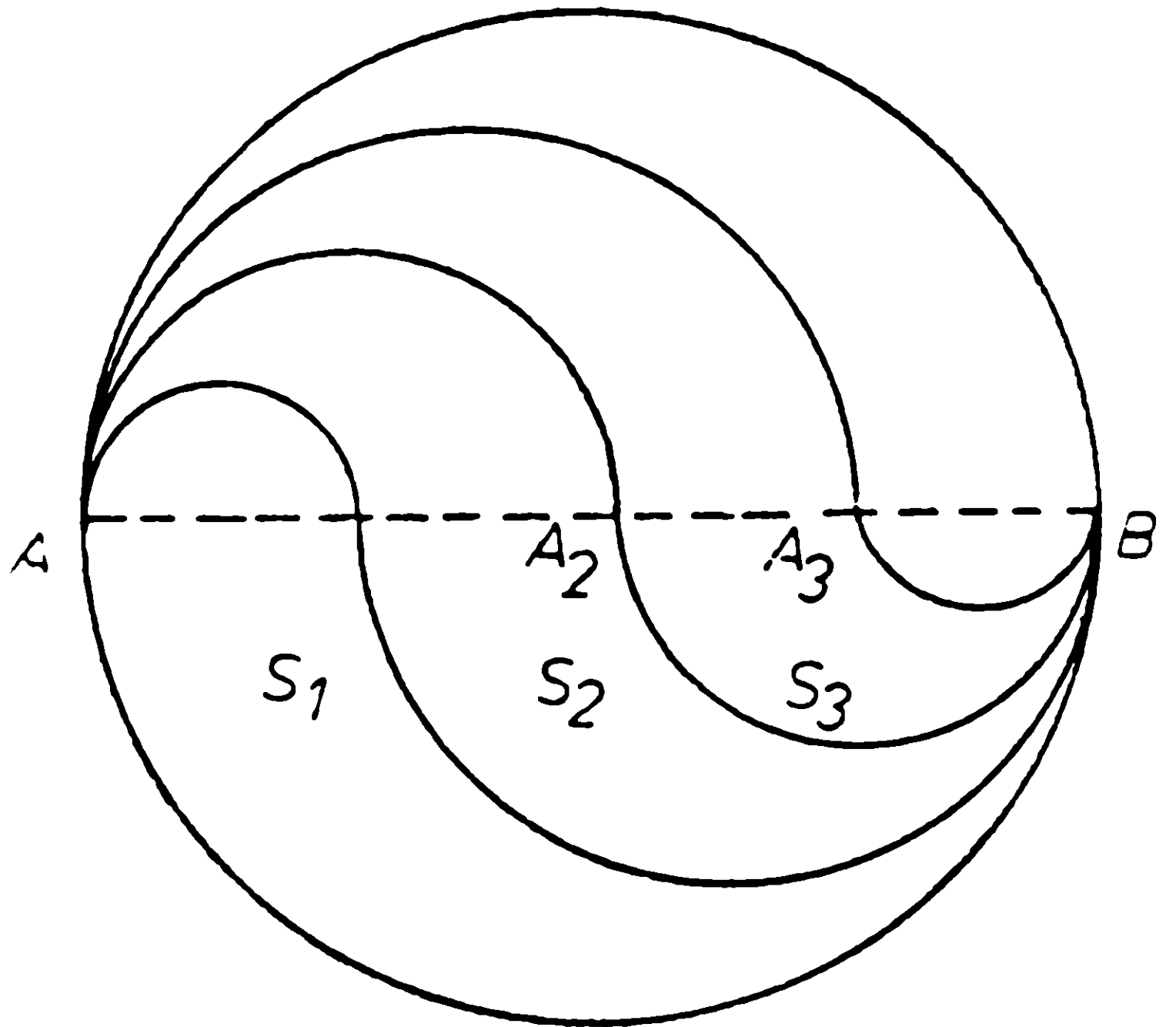


Fig. 67.

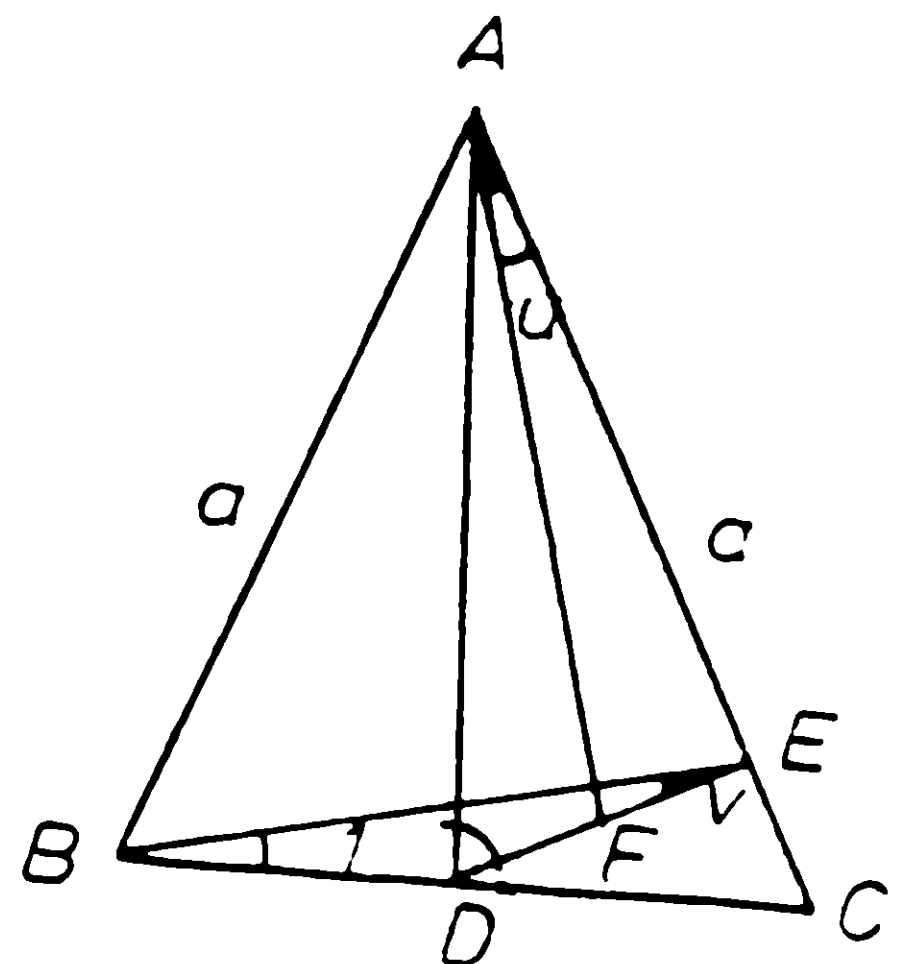


Fig. 68.

68. Fie ABCDE pentagonul; ABF, BCG, CDH, DEI, EAK cele cinci triunghiuri; L, M, N, P, Q punctele de întâlnire ale cercurilor circumscrise

triunghiurilor de mai sus. Cercurile circumscrise triunghiurilor ABF, BCG, FCI din patrulaterul complet ABCIGF trec prin punctul lui Miquel, L. De asemenea, cercurile circumscrise triunghiurilor CDH, EDI, FCI din patrulaterul complet CDEFIH trec prin punctul N. Deci cercul circumscris triunghiului FCI trece prin L și N.

Cercurile ABF, FCI și LNQ au un punct comun L. Dreapta FAI trecînd prin punctul de intersecție F al primelor două cercuri, rezultă că dacă unim punctele A și I cu intersecțiile Q și N ale acestor două cercuri cu al treilea, dreptele QA și IN prelungite se întîlnesc într-un punct R al cercului LNQ.

Dacă se consideră acum punctele Q, N, E situate pe laturile triunghiului ARI, cercurile QRN, NEI, QEA trec prin același punct care este P, cercurile NEI, QEA fiind identice cu cercurile DEI, AEK.

Deci punctele Q, L, P, N sînt conciclice.

Analog se arată că și M aparține cercului pe care se găsesc cele patru puncte de mai sus.

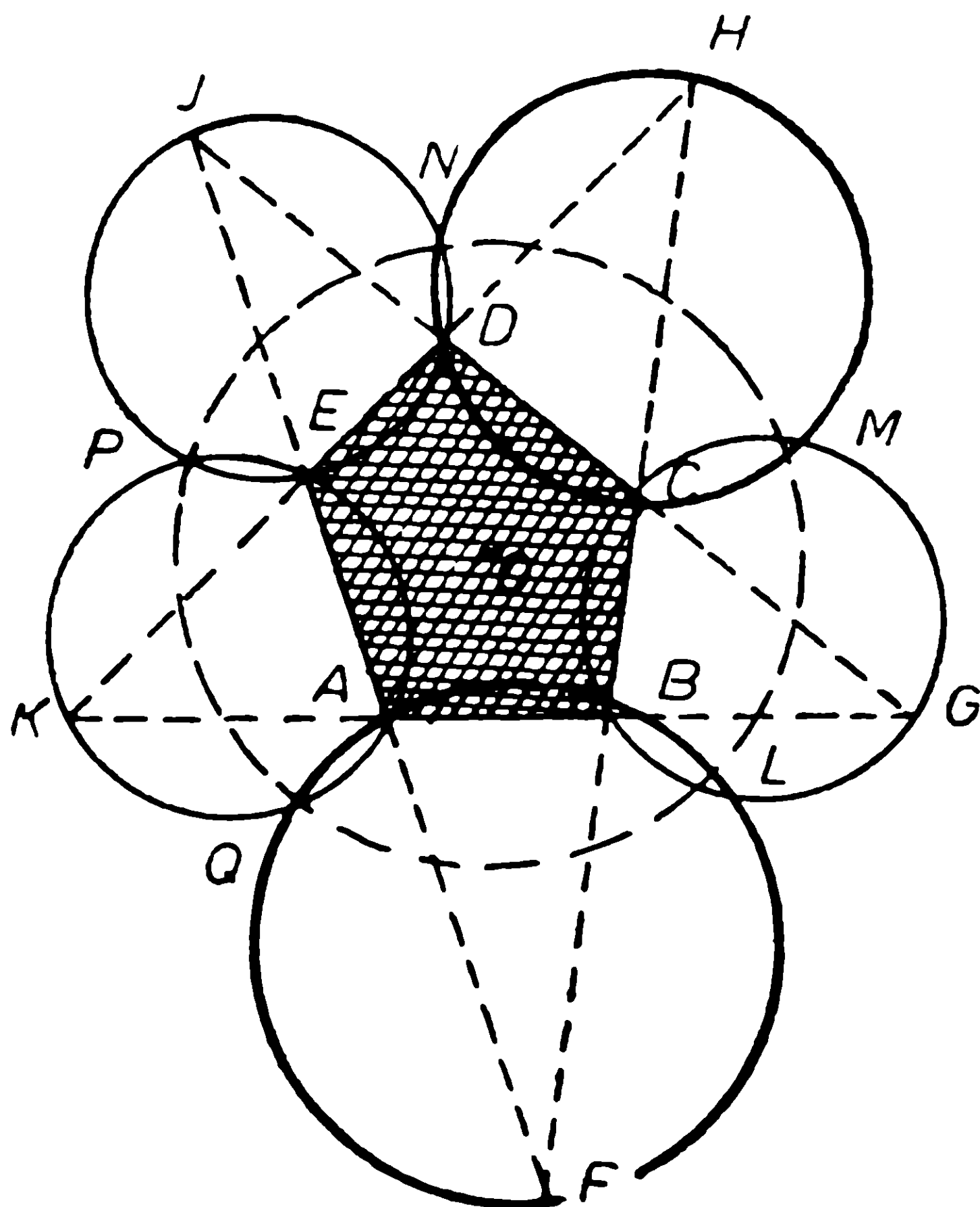


Fig. 69.

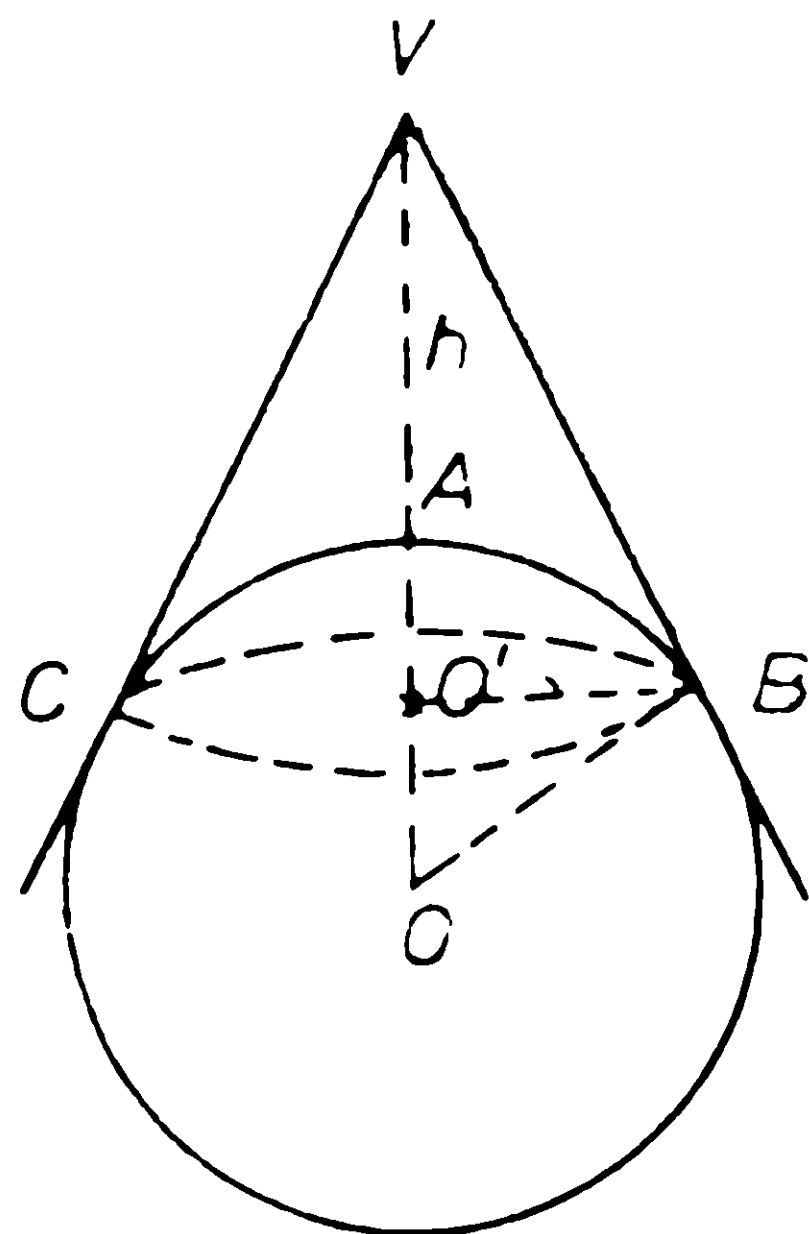


Fig. 70.

69. Suprafața de pămînt văzută este calota sferică de înălțime $\overline{O'A}$, a cărei arie este: $2\pi R \cdot \overline{O'A}$. Pentru a determina pe $\overline{O'A}$, aflăm mai întîi pe $\overline{OO'}$, aplicînd teorema catetei în triunghiul dreptunghic OBV:

$$\overline{OB}^2 = \overline{OV} \cdot \overline{OO'}; \quad \overline{OO'} = \frac{R^2}{R+h}; \quad \text{de unde} \quad \overline{OA'} = R - \frac{R^2}{R+h}; \quad \overline{O'A} = \frac{Rh}{R+h};$$

$$\text{aria văzută} = \frac{2\pi R^2 h}{R+h}.$$

70.

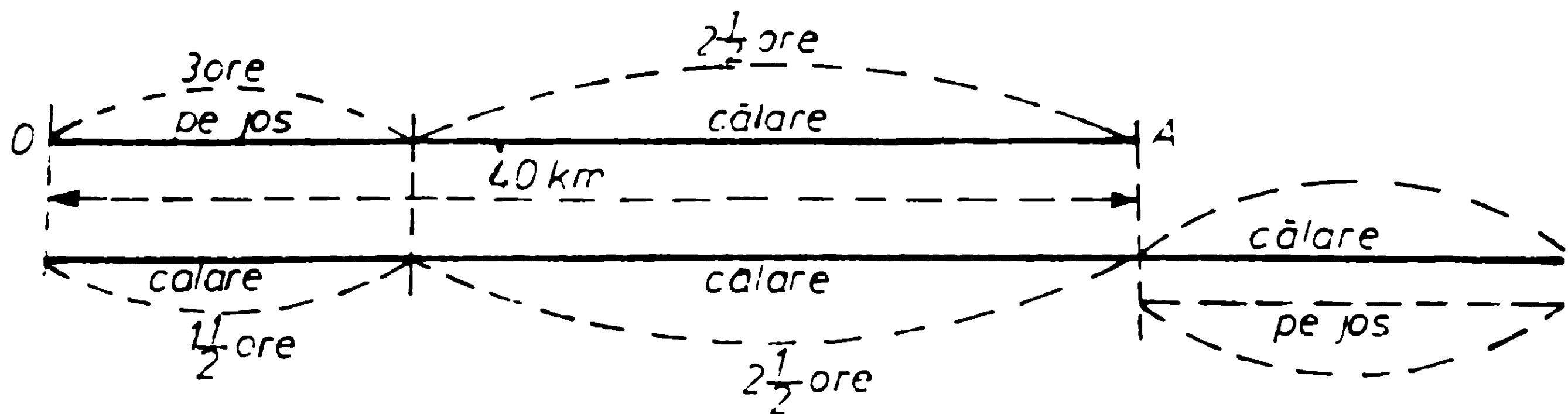


Fig. 71.

- Rezultă:** — viteza călare este dublul vitezei pe jos;
 — distanța de 40 km poate fi străbătută pe jos în 8 ore;
 — viteza pe jos este $40 : 8 = 5$ km/oră;
 — viteza călare este $5 \cdot 2 = 10$ km/oră.

71. Volumul sectorului sferic $V_{OBAB'} = \frac{RS}{3}$ unde S (suprafața calotei sferice) $= 2\pi Ri$, iar $i = AC = R - R \cos \alpha = R(1 - \cos \alpha) = 2R \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}$; deci:

$$V_{OBAB'} = \frac{R \cdot 2\pi R \cdot 2R \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{3} = \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

Pentru ca $V_{OBAB'} = \frac{1}{4} V$ sferă, trebuie să avem:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}; \quad \text{de unde } \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}; \quad \frac{\alpha}{2} = 30^\circ; \quad \alpha = 60^\circ.$$

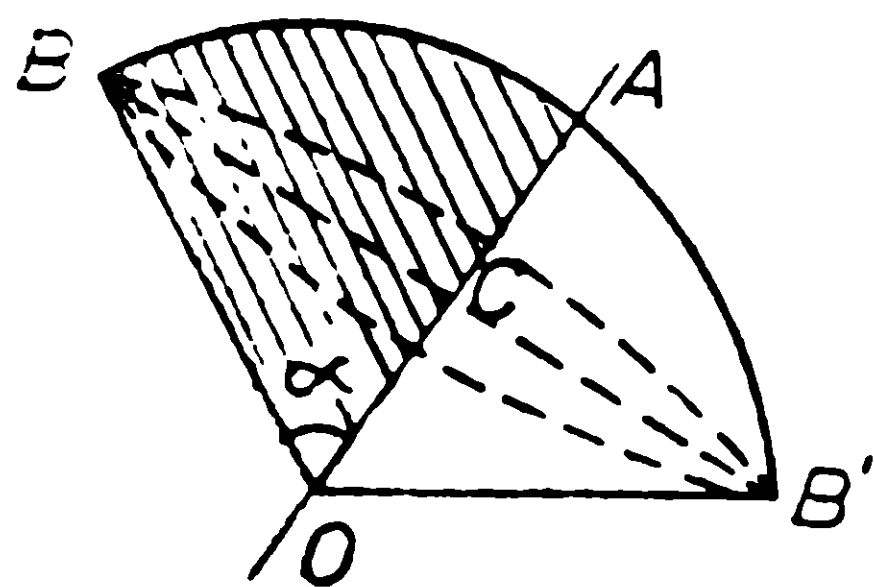


Fig. 72.

72. Fie unghiul drept în A, iar O, G, D puncte ale arcelor BC, CA, AB astfel alese ca MN, HL, EF fiind tangentele în aceste puncte să avem:

$$OM = ON, \quad GH = GL, \quad DE = DF.$$

În triunghiul dreptunghic AEF, AD este mediană. Deci $AD = DE = DF$ și $\angle DAF = \angle DFA$.

Dar $2 \text{ măs. } \angle DAF = \text{măs. } \widehat{DB}$; iar $2 \text{ măs. } \angle DFA = \text{măs.}(\text{arc AD} - \text{arc DB})$ și $\text{arc AD} = \frac{2}{3} \text{ arc ADB}$

Analog arătăm că $\text{arc AG} = \frac{2}{3}$. Deci $\text{arc AD} + \text{arc AG} = \text{arc DAG} = \frac{2}{3} \text{ arc BAC} = 120^\circ$.

De asemenea triunghiul dreptunghic MAN ne dă $\angle MAO = \angle AMO$.
Deci $2 \text{ arc } BO = \text{arc } ACO$ și cum $2 \text{ arc } BD = \text{arc } AD$, $\text{arc } OBD - \text{arc } BO +$
 $+ \text{arc } BD = 120^\circ$.

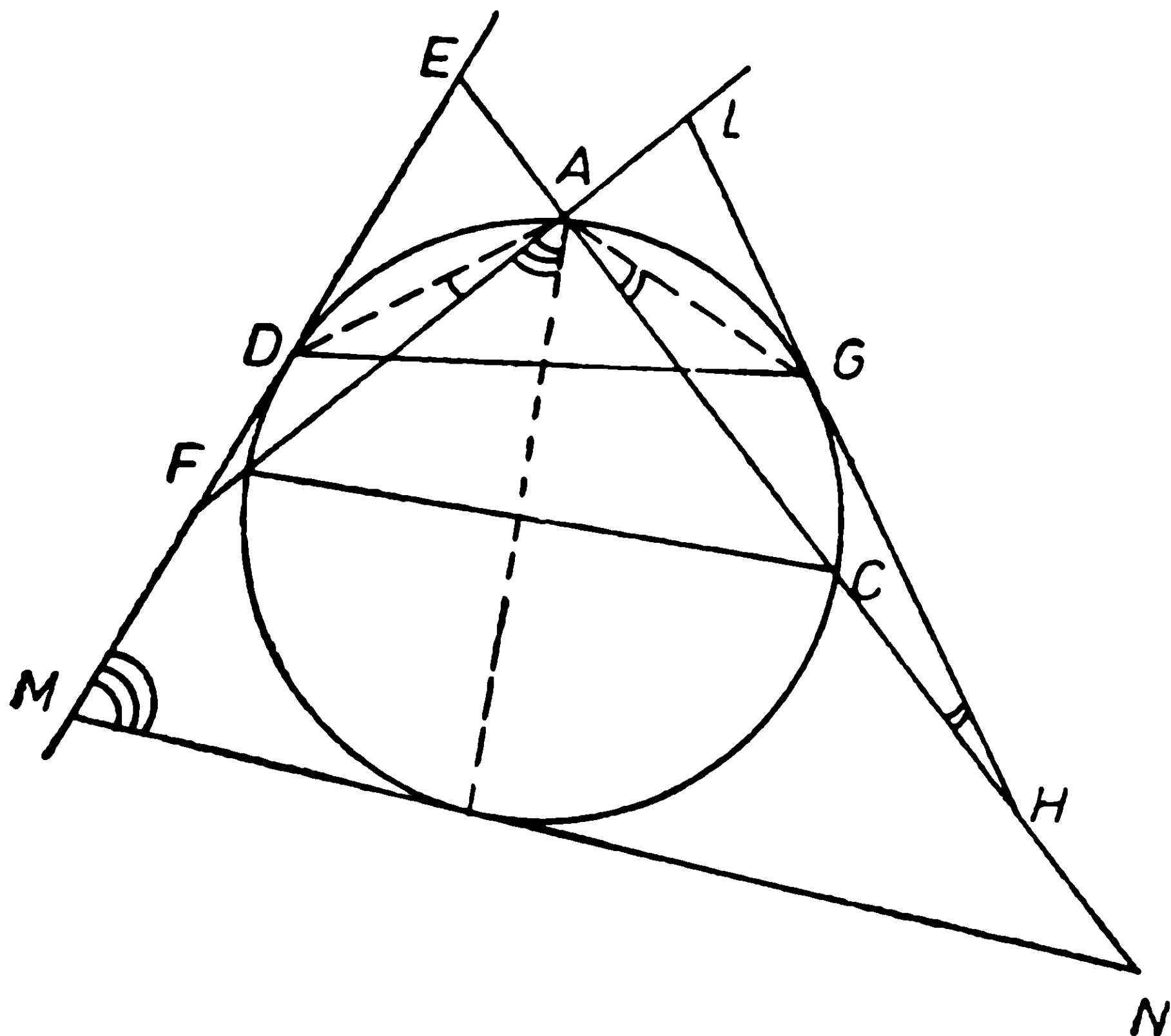


Fig. 73.

73. Se consideră un cerc (Γ) concentric cu cercul înscris, care intersectează laturile ce pleacă din vîrfurile A, B, C, respectiv în perechile de puncte (A_1, A_2) , (B_1, B_2) , (C_1, C_2) și fie (O_a) , (O_b) , (O_c) cercurile tangente la laturile lui ABC în perechile de puncte (A_1, A_2) , (B_1, B_2) , (C_1, C_2) . Avem $\overline{A_1B_2} = \overline{A_2C_1}$

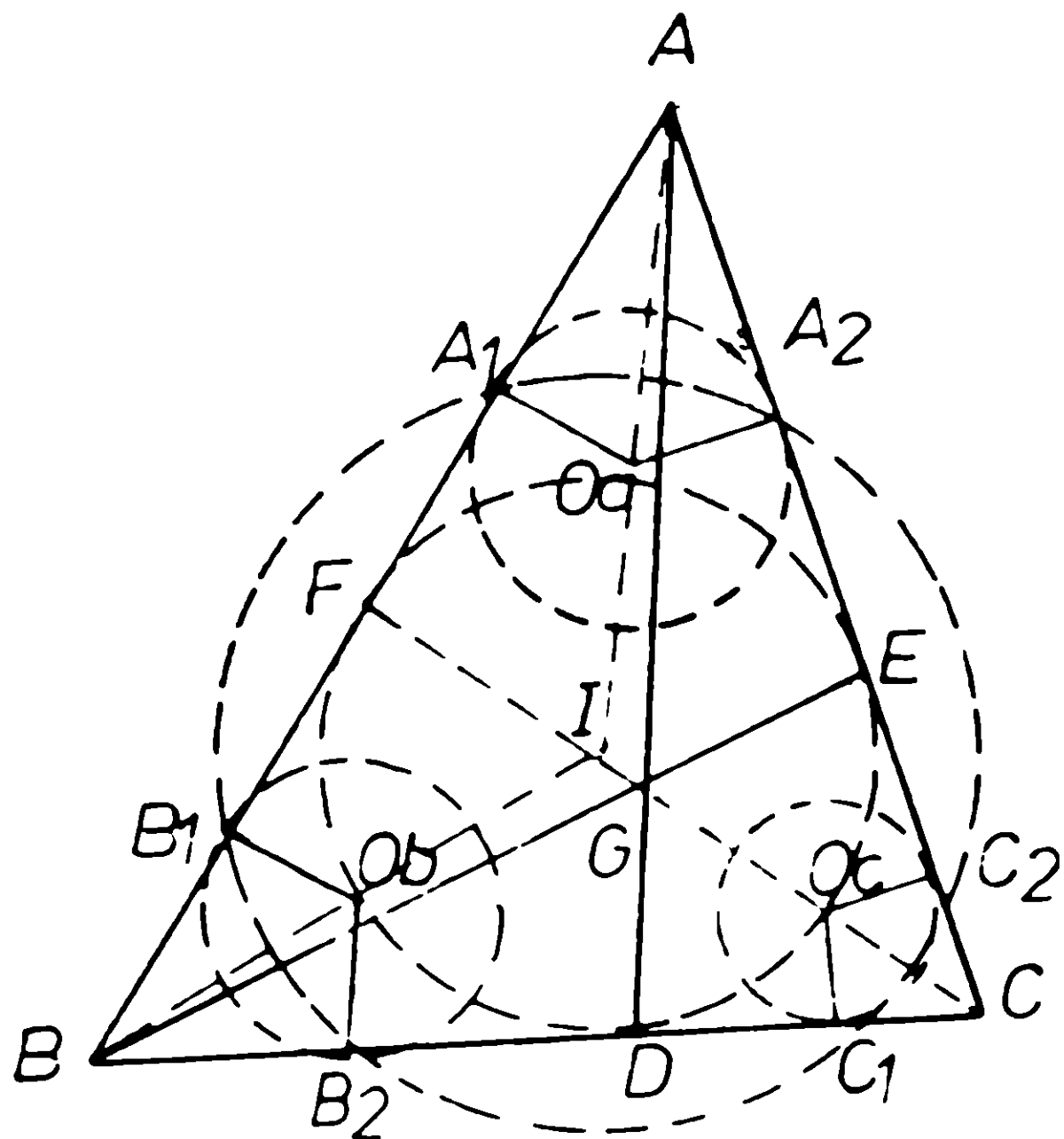


Fig. 74.

ca coarde egal depărtate de centru și $\overline{AA_1} = \overline{AA_2}$. Rezultă că $\overline{AB_2} = \overline{AC_1}$ și deci A aparține axei radicale a cercului (O_b) și (O_c) . De asemenea D aparține acestei axe căci $\overline{DB_1} = \overline{DC_2}$.

Dreptele AD, BE, CF concură în centrul radical al cercurilor (O_a) , (O_b) , (O_c) .

O rezolvare mai scurtă se obține prin teorema lui Ceva.

3. Probleme criptaritmetice

1. Cifra 2 a zecilor de la înmulțitor înmulțită cu cifra unităților de la deînmulțit trebuie să ne dea un număr terminat în cifra 2. Observăm că din cifrele existente numai cifrele 1 și 6 înmulțite cu cifra 2 ne dau numere terminate cu cifra 2.

Pe care din cifrele 1 și 6 o vom pune la locul cifrei unităților de la deînmulțit? Observăm mai departe că rezultatul înmulțirii dintre cifra zecilor 2 de la înmulțitor și cifra zecilor de la deînmulțit este un număr terminat cu cifră fără soț, ceea ce dovedește clar, că în el se includ și zecile provenite din adunarea unităților de ordinul I.

Deci, în locul cifrei unităților de la deînmulțit punem cifra 6.

Se constată că dintre rezultatele produselor dintre cifra 2 și celelalte cifre existente adunate fiecare cu 1, convine doar $2 \cdot 5 + 1 = 11$. Deci, în locul cifrei zecilor de la deînmulțit punem cifra 5.

În continuare, observăm că cifra unităților 6 de la înmulțitor trebuie să ne dea un număr terminat cu cifra 8. Din cifrele existente numai cifrele 3 și 8 înmulțite cu cifra 6 ne dă numere terminate cu cifra 8. Făcând încercarea avem $8 \cdot 6 = 48$ și $8 \cdot 5 + 4 = 44$.

Deci convine cifra 8.

Deducem că cifra sutelor de la înmulțitor este 3, căci numai ea este singura dintre toate celelalte cifre existente care poate crea prin înmulțire cu deînmulțitul un număr în care cifra sutelor să fie cifra 3. Înlocuind pe x cu cifrele astfel determinate, rezultă înmulțirea:

$$\begin{array}{r} 456 \\ 328 \\ \hline 3648 \\ 912 \\ 1368 \\ \hline 149568 \end{array}$$

2. Pentru identificarea fiecărei cifre vom însemna coloanele înmulțirii cu literele A—F, iar rîndurile cu I—VI, așa cum se vede mai jos:

A	B	C	D	E	F	
			3	*	*	I
			*	3	*	II
		*	*	9	*	III
		*	4	5		IV
	*	*	6	*		V
	*	*	*	*	0	VI

iar fiecare cifră o vom scrie numai cu un indicativ care să arate coloana și rîndul în care se află. De exemplu, cifra 3 a înmulțitorului va avea indicativul E II.

Cifra F VI a rezultatului fiind 0, urmează că F III trebuie să fie tot zero. E IV fiind 5 și provenind dintr-o înmulțire a unei cifre cu 3, rezultă că F I este 5.

Cum $3 \times 5 = 15$ și cum după ce am scris pe 5 la F IV urmează să adunăm pe 1 la înmulțirea lui 3 de la E II cu cifra E I pentru a obține pe 4, urmează că E, este 1.

Este ușor acum de precizat că cifra de la F II este 6, căci din cele patru cifre cu soț (2, 4, 6, 8) care înmulțite cu 5 ne dau un număr terminat cu 0, numai 6×5 ne dă, pentru primele două cifre ale rîndului III, pe 90.

Mai rămîne de aflat D II. Această cifră înmulțită cu 15 trebuie să ne dea un număr care să aibă ca cifră a zecilor pe 6. Această cifră nu poate fi decît 4.

Rezultă: deînmulțit 315; înmulțitor 436 și ușor se poate reconstitui înmulțirea.

3. R. $415 \times 382 = 158\,530$

4. Analizînd succesiunea operațiilor, observăm că la ultima scădere s-au coborît deodată două cifre de la deîmpărțit. Aceasta dovedește că pen-ultima cifră a cîtului este un 0.

Produsul parțial prin 7 are trei cifre; el se scade dintr-un număr de trei cifre și dă un rest de trei cifre. Produsul următor parțial are tot trei cifre, se scade dintr-un număr de patru cifre și dă un rest de două cifre; deci acest produs parțial este mai mare decît cel care corespunde lui 7.

Deci, după 7 la cît vine 8 sau 9. Cum însă primul și ultimul produs parțial au cîte patru cifre, reiese că acestea se datoresc cifrei 9 și rămîne ca după 7 să vină un 8. Cu modul acesta cîtul este neapărat 97 809.

Produsul parțial prin 8 avînd numai trei cifre, împărțitorul este inferior lui $1\,000/8 = 125$.

Cum împărțitorul are trei cifre, se vede că prima cifră a lui este 1. Cum și $125 \times 9 = 1\,125 < 2\,000$, rezultă că produsele parțiale prin 9 încep cu 1.

Introducînd valorile găsite pînă aici în schema de calcul dată obținem:

$$\begin{array}{r}
 * * * * * * * * \quad 1 * * \\
 1 * * * \quad \hline
 97809 \\
 * * * \\
 * * * \\
 \hline
 * * * * \\
 * * * \\
 \hline
 1 * * * \\
 1 * * *
 \end{array}$$

Produsul parțial prin 8 se scade din cel puțin 1 000 și dă cel mult restul 19. Prin urmare acel produs parțial este cel puțin $1\,000 - 19 = 981$. Deci împărțitorul este cel puțin $981/8 = 122,6$. Fiind întreg este cel puțin 123.

Am arătat însă că împărțitorul este sub 125, deci nu ar putea fi decît 123 sau 124.

Produsele parțiale prin 9 ar putea fi numai $123 \times 9 = 1\,107$ sau $124 \times 9 = 1\,116$. Cifra sutelor lui este deci neapărat 1.

Restul pe care-l dă produsul parțial prin 8 este deci 11 și prin urmare acel produs este cel puțin $1\,000 - 11 = 989$.

Împărțitorul este deci cel puțin $989/8 = 123,6$.

Conchidem de aici că împărțitorul este 124 și că deci deîmpărțitul este $124 \times 97\,809 = 12\,128\,316$.

O verificare este necesară, întrucît nu am utilizat toată schema dată. Efectuăm calculul:

$$\begin{array}{r}
 12\,128\,316 \mid 124 \\
 11\,16 \quad \hline
 968 \\
 868 \\
 \hline
 1003 \\
 992 \\
 \hline
 1116 \\
 1116
 \end{array}$$

El corespunde schemei date.

5. R. $52650 : 325 = 162$

6. R. $1337174 : 943 = 1418$;

$1343784 : 949 = 1416$;

$1200474 : 846 = 1419$;

$1202464 : 848 = 1418$.

7. Cînd am înmulțit împărțitorul cu prima cifră a cîtului ne-a dat un număr cu 4 cifre (4 stelute); cînd l-am înmulțit cu 8 ne-a dat un număr de 3 cifre, deci mai mic.

Rezultă că prima cifră a cîtului este 9. La fel ultima. Cîtul este 989. Să găsim împărțitorul.

Cînd am înmulțit împărțitorul cu 8, ne-a dat un număr de 3 cifre care scăzut dintr-un număr de 3 cifre dă rest tot un număr de 3 cifre; acest număr este mai mic ca 900 (căci $999 - 900 = 99$; nu ne dă restul cu 3 cifre); $900 : 8 = 112$.

Dacă împărțitorul ar fi mai mic ca 112, înmulțit cu 9 nu ne-ar da 4 cifre. $111 \times 9 = 999$. Deci împărțitorul nu poate fi decît 112.

Înmulțind 112 cu 989 găsim deîmpărțitul.

Apoi facem împărțirea ca să vedem dacă cifrele se vor așeza cum arată stelutele.

8. a) Să analizăm mai întîi produsul numărului ABC cu A (rîndul 4). Ultima cifră a acestui produs este A; prin urmare ea nu este 1, deoarece în caz contrar și C ar fi 1; or, potrivit condiției, unor litere diferite le corespund cifre diferite.

Totodată observăm că A nu este mai mare decît 3, deoarece în caz contrar produsul analizat ar avea mai mult de trei cifre, iar schema ne arată că el are trei cifre. Așadar, A poate să fie numai 2 sau 3.

Să presupunem că $A = 3$. Ce valoare trebuie să aibă C pentru ca produsul lui 3 cu C să se termine cu cifra 3? Singura cifră care satisface condiția este $C = 1$ ($3 \cdot 1 = 3$).

Dar C nu poate fi 1, deoarece produsul numărului ABC cu C este un număr de patru cifre (rîndul 3). Prin urmare, A nu este 3. Atunci, $A = 2$. Să căutăm din nou o valoare a lui C, care înmulțită cu 2 să dea un produs terminat cu cifra 2. Singura valoare posibilă pentru C este 6.

Să analizăm acum produsul numărului 2 B 6 (rîndul 5). Ultima cifră a acestui produs este egală cu B, ea este obținută prin înmulțirea lui B cu 6. Trei sînt valorile posibile pentru B: 4, 6 și 8; dar $246 \times 4 = 984$, număr cu trei cifre. Valoarea 6 nu corespunde, deoarece $C = 6$. Prin urmare, $B = 8$.

Așadar, $ABC = 286$, iar $BAC = 826$.

b) I. Deoarece din înmulțirea unui număr de trei cifre cu 2 se obține un număr cu 4 cifre (rîndul 4), iar în rîndurile 3 și 5 sînt numere cu trei cifre, înseamnă că amîndouă numerele de la capetele rîndului al doilea trebuie să fie mai mici decît 2, adică sînt egale cu 1.

Așadar înmulțitorul este 121.

II. Deoarece rîndul al cincilea este obținut prin înmulțirea deînmulțitului cu 1, cifra 8 aflată în rîndul al cincilea arată că a doua cifră a deînmulțitului (primul rînd) este egală cu 8 și, prin urmare, a doua cifră din rîndul al treilea este tot 8 (rîndul al treilea se obține prin înmulțirea primului rînd cu 1). Așadar, avem:

$$\begin{array}{r}
 * 8 * \times \\
 1 2 1 \\
 \hline
 * 8 * \\
 * * * * \\
 * 8 * \\
 \hline
 * * 9 * 2 *
 \end{array}$$

III. Prima cifră din primul rînd este mai mare decît 4, căci altfel rîndul al patrulea nu ar putea fi un număr cu 4 cifre. Dar chiar dacă prima cifră

din primul rînd ar fi 9, prima cifră din rîndul patru tot nu va putea fi mai mare decît 1.

De asemenea, este evident că ultima cifră din rîndul al patrulea este 4 (suma trebuie să se termine cu cifra 2; vezi rîndul al șaselea).

IV. Acum este clar că prima cifră din rîndul al șaselea poate fi numai 1, iar prima cifră din rîndul al cincilea (prin urmare și din rîndurile al treilea și primul), 8 sau 9, căci altfel rîndul al șaselea nu va fi un număr cu 6 cifre.

$$\begin{array}{r}
\begin{array}{r}
* 8 * \times \\
1\ 2\ 1 \\
\hline
* 8 * \\
1\ * \ * \ 4 \\
* 8 * \\
\hline
* \ * \ 9 \ * \ 2 \ *
\end{array}
\end{array}$$

V. Deoarece ultima cifră din rîndul al patrulea este 4, atunci ultima cifră din rîndul al treilea, al cincilea și primul este 2 sau 7.

VI. A treia cifră din rîndul al patrulea este sau 6 sau 7, deoarece este ultima cifră a produsului 2×8 , mărit cel mult cu 1.

A doua cifră din rîndul al patrulea este sau 7 sau 9, depinzînd de faptul dacă prima cifră din primul rînd este 8 sau 9. Dacă a doua cifră din rîndul al patrulea ar fi 7, atunci coloana în care se găsește $(7 + 8)$ ar trebui completată cu numărul 4, pentru a asigura acestei coloane cifra 9 indicată la rezultat, dar suma celor trei numere din coloana a treia (chiar dacă toate trei ar fi 9) nu poate da mai mult de două unități din ordinul următor (cea mai mare valoare posibilă este 28).

Prin urmare, a doua cifră din rîndul al patrulea este 9.

VII. Din punctele VI și IV, rezultă că prima cifră din primul rînd (prin urmare și din rîndurile al treilea și al cincilea) nu poate fi decît cifra 9:

$$\begin{array}{r}
\begin{array}{r}
9\ 8\ * \times \\
1\ 2\ 1 \\
\hline
9\ 8\ * \\
19\ * \ 4 \\
98\ * \\
\hline
* \ * \ 9 \ * \ 2 \ *
\end{array}
\end{array}$$

VIII. Deoarece ultima cifră necunoscută a deînmulțitului determină toate celelalte cifre ale produsului, rezultă că a treia cifră din primul rînd nu este 2, ci 7 (vezi pct. V).

Dacă ultima cifră din primul rînd ar fi 2, ea nu ar da, ca a treia cifră din rîndul al șaselea, cifra 9.

În felul acesta, am izbutit să reconstituim toate cifrele ascunse. Rezultatul căutat este:

$$987 \times 121 = 119427.$$

c) Raționînd analog ca la punctul a, găsim:

$$3125 : 25 = 125.$$

d) $ATOM = 9376$.

e) $7375428413 : 125473 = 58781$.

4. Un concurs antrenant

1—D; 2—A; 3—D; 4—E; 5—E; 6—B; 7—A; 8—C; 9—D; 10—C; 11—B;
12—E; 13—B; 14—A; 15—C; 16—C; 17—B; 18—A; 19—C; 20—D; 21—E;
22—D; 23—C; 24—B; 25—A; 26—A; 27—C; 28—D; 29—C; 30—C; 31—D;
32—E; 33—A; 34—B; 35—B; 36—C; 37—D; 38—E; 39—D; 40—D.¹

N O T Ă: Stabilirea răspunsului corect nu se poate face la întâmplare, ci urmărind procesul viu al gândirii matematice. Faptul că într-un timp scurt se cer soluții la un volum mare de probleme impune ca rezolvarea să fie doar schițată pentru a intui și alege critic soluția convenabilă.

Evident, aceasta implică rutină în rezolvarea problemelor de acest gen, unul din cele patru rezultate indicate avînd rolul de element de control. În plus, scutește pe cel ce lucrează de a prezenta o rezolvare scrisă, cu justificarea respectivă.

Astfel de concursuri au un scop limitat (rapiditate, prin calcule strict necesare și discernămint). Ele nu pot înlocui metodele clasice de pregătire, ci constituie doar un criteriu original de verificare a cunoștințelor matematice.

¹ 1—D = problema 1, soluția D (bună).

5. Paradoxuri matematice

1. Dacă pătratele a 2 cantități sînt egale, nu reiese sigur că și aceste cantități sînt egale. Deci cînd extragem rădăcina pătrată în expresia (2), trebuie să ținem seama de semnele termenilor.

2. Vezi problema 1.

3. Din punct de vedere „formal” rezolvarea pare corectă.

Rezultatul paradoxal la care s-a ajuns se datorește faptului că s-a făcut împărțirea egalității cu $a-b$ fără să se țină seama că $a-b=0$.

4. Nu s-a ținut seama că la extragerea rădăcinii pătrate în fața expresiei trebuie să considerăm $\pm$ și că se iau acele semne care fac posibilă egalitatea:

$$\pm\left(4 - \frac{9}{2}\right) = \pm\left(5 - \frac{9}{2}\right)$$

$$+\left(4 - \frac{9}{2}\right) = -\left(5 - \frac{9}{2}\right)$$

$$4 + 5 = \frac{9}{2} + \frac{9}{2} = 9.$$

8. Greșeala constă în aceea că, făcînd simplificarea cu $\lg_{10}\left(\frac{1}{2}\right)$, noi nu am schimbat sensul inegalității ($>$ în $<$), așa cum se impunea cînd împărțeam cu un număr negativ $\left(\lg \frac{1}{2} < 0\right)$.

10. S-a obținut un rezultat paradoxal, deoarece la simplificarea prin $AB^2 - BD \times BC$, nu s-a ținut seama că acest factor este egal cu zero, după cum rezultă scriind că laturile triunghiurilor asemenea ABC și ABD sînt proporționale, deci:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB} \quad \text{sau} \quad AB^2 - BD \cdot BC = 0.$$

În felul acesta, expresia (2) devine:

$$BD \times 0 = BC \times 0,$$

care este satisfăcută pentru orice valoare ar avea BD sau BC.

11. Patrulaterul ANCM avînd două laturi egale și paralele este un paralelogram. Segmentul MD fiind construit egal cu AB, rezultă că BD este paralel cu MA și cu CN. Din această cauză triunghiurile AMC și ODC sînt asemenea și deci putem scrie proporționalitatea dintre laturile lor: $\frac{AM}{z+y} = \frac{a+b}{a}$.

În mod analog, triunghiurile AMN și BEN sînt și ele asemenea. Din asemănarea lor rezultă:

$$\frac{AM}{x+y} = \frac{a+b}{a}.$$

Comparînd ultimele egalități, putem scrie:

$$\frac{AM}{z+y} = \frac{AM}{x+y}; \quad \frac{AM}{AM} = \frac{z+y}{x+y} = 1; \quad x=z.$$

Atunci proporția obținută anterior $\frac{x-z}{z-x} = \frac{b}{a}$ devine $\frac{b}{a} = \frac{0}{0}$, adică o nedeterminare și nu valoarea negativă a unității cum am obținut noi.

Dacă am fi înlăturat nedeterminarea, nu am fi ajuns la un rezultat paradoxal.

13. Raționamentul folosit ar fi bun dacă n-am fi comis o eroare fundamentală în privința limitei. Se știe că limita unei sume nu este egală cu suma limitelor atunci cînd numărul termenilor adunați este infinit. Deci, la limită, suma circumferințelor nu poate coincide cu diametrul AB și $\pi D \neq D$.

6. Probleme recreative

1. Înțeleptul A a raționat astfel: „Fiecare din noi poate crede că fruntea lui este curată.

B este convins că fruntea lui este curată și râde de fruntea mînjită a înțeleptului C. Dar dacă B ar fi văzut că fața mea este curată, l-ar fi mirat rîsul lui C, deoarece, în acest caz, C nu ar fi avut motiv să rîdă. Dar B nu este mirat, deci el poate crede că C râde de mine. Așadar, fruntea mea este murdară“.

2. $\frac{14-6}{2} + 1 = 5$ zile.

3. Avem succesiv: $9 + 5 = 14$; $14 : 2 = 7$; $14 + 7 = 21$; $21 + 1 = 22$; $22 \cdot 2 = 44$; $44 + 4 = 48$; $48 : 2 = 24$; $48 + 24 = 72$.

4. Ultimul băiat a dansat cu un număr de fete mai mare cu 4 decît numărul băieților. Deci numărul băieților: $\frac{20-4}{2} = 8$; numărul fetelor: $8 + 4 = 12$.

Soluția algebrică. Fie x , numărul băieților: $20 - x$, numărul fetelor. Stabilim și rezolvăm ecuația: $x + 4 = 20 - x$.

5. Trei minute, deoarece fiecare pisică omoară un șobolan în 3 minute.

6. Umplu vasul de 5 l, torn în cel de 3 l pînă se umple; restul de 2 l îl torn în vasul mare.

Golesc vasul de 3 l în cel de 5 l, îl umplu apoi pe acesta și repet operația.

7. R. 2 lei

9. Călătorul ar putea pune următoarea întrebare:

„Mint eu dacă spun că A se află în direcția . . . ?“

Mincinosul va răspunde: — „minți“, deci direcția e bună;

Cel care spune adevărul va răspunde: — „nu minți“, deci direcția e bună; similar, pentru cazul contrar.

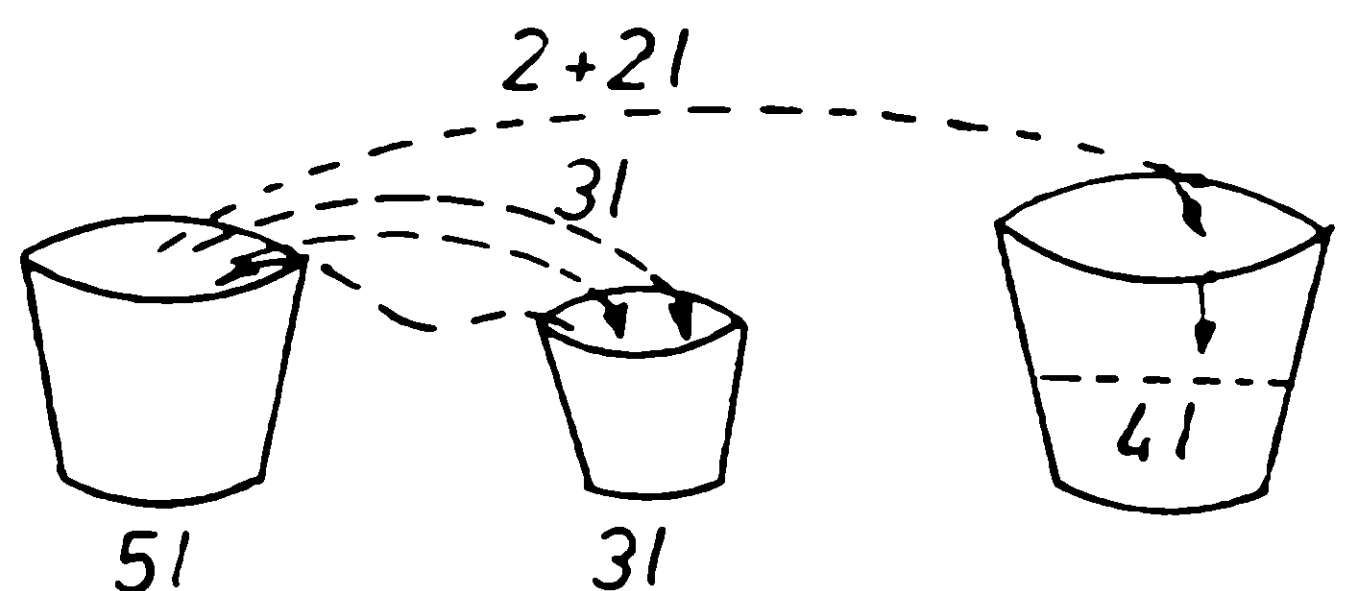


Fig. 75.

Dar cum va deosebi el care dintre ei este mincinos și care spune adevărul? Aci apare cercul vicios (vezi problemele 1 și 2, pag. 80).

10. Singura salvare a acuzatului este să pună în dilemă pe judecător. El ar putea spune: — „*Declar că nu voi fi condamnat la moarte*“. Dar și aci apare cercul vicios (vezi problema 41 pag. 95).

11. R. 13 grupuri

12. Fie A prințul, B, C și D cei 3 oșteni. B știe că are bilă neagră ca și vecinii săi, A și C, deci cel din față poate să aibă una din cele 3 culori; posibilitatea de a spune două culori adevărate este prea mică, deci spune „nu știu“ ca să scape cu viață. Făcînd același raționament, C și D spun: „nu știu“.

Feciorul de împărat își dă seama de această situație (din răspunsurile lor) și spune: negru, cîștigînd astfel dreptul de a lua de soție pe fiica lui Roșu Împărat.

13. Dacă notăm cu x vîrsta căutată, în urma efectuării operațiilor cerute vom obține $10x - 9k$, unde k este un număr monodrom (de o singură cifră) oarecare.

Transformăm diferența obținută:

$$10x - 9k = 10x - 10k + k = 10(x - k) + k.$$

Dacă persoana are mai mult de 9 ani, $x - k$ este un număr pozitiv. În acest caz, numărul $10(x - k) + k$ are k unități și dacă vom elimina k unități, atunci cifrele rămase își vor modifica ordinul, adică zecile vor deveni unități, sute - zeci etc.; în concluzie, numărul se va micșora de 10 ori și va fi egal cu $x - k$.

Adunînd la acest număr cifra k pe care am eliminat-o, vom obține vîrsta căutată, x .

14. Al doilea băiat primește a treia parte din sumă în fiecare caz. Primul primește $\frac{6}{15}$ în loc de $\frac{7}{18}$, deci un plus de $\frac{1}{90}$ din sumă. Al treilea va lua deci mai puțin. Deci $\frac{1}{90}$ din suma depusă reprezintă 12 lei. Întreaga sumă depusă este 1 080 lei.

Pe carnetul de CEC al fiecărui băiat s-au înscris, respectiv, sumele: 432, 360 și 288 lei.

15. Primul ministru a distrus hîrtia pe care o scosese și a lăsat pe judecător să dea sentința după hîrtia rămasă pe care era scris „*pleacă*“; deci a considerat că pe hîrtia distrusă scria „*rămîi*“, — și primul ministru a rămas.

16. Tînărul a parcurs în total o distanță de $2x$, iar doctorul — de patru ori mai puțin, adică $\frac{x}{2}$. Pînă la întîlnire, doctorul a făcut jumătate din drumul parcurs de el, adică $\frac{x}{4}$, iar tînărul — restul de drum, adică $\frac{3x}{4}$.

Doctorul a parcurs partea sa de drum în $\frac{x}{12}$ ore, iar tînărul — în $\frac{3x}{16}$ ore; mai știm că tînărul pornise la drum cu un sfert de oră înaintea doctorului, obținem ecuația:

$$\frac{3x}{16} - \frac{x}{12} = \frac{1}{4}; \quad x = 2,4 \text{ km}$$

17. Suma totală la începutul jocului a fost aceeași ca și la terminarea lui, adică $7 \cdot 12,8 = 89,60$ lei.

La început, jucătorul care a pierdut primul poseda x lei.

După prima partidă, i-au rămas:

$$x - (7 \cdot 12,8 - x) = 2x - 7 \cdot 12,8.$$

După a doua partidă banii lui s-au dublat:

$$2(2x - 7 \cdot 12,8).$$

După a treia partidă avea:

$$2^2(2x - 7 \cdot 12,8) \text{ lei.}$$

După a șaptea partidă (la terminarea jocului) avea:

$$2^6(2x - 7 \cdot 12,8) = 12,8.$$

Rezolvînd această ecuație, găsim: $x = 44,90$ lei.

Fie y banii pe care-i avea la începutul jocului jucătorul al doilea; după prima partidă, el are $2y$.

După a doua partidă, pierzînd, plătește $7 \cdot 12,8 - 2y$ lei și-i rămîne $2y - (7 \cdot 12,8 - 2y) = 4y - 7 \cdot 12,8$ lei.

După a treia partidă avea: $2(4y - 7 \cdot 12,8)$.

După a șaptea: $2^5(4y - 7 \cdot 12,8)$.

Obținem ecuația: $2^5(4y - 7 \cdot 12,8) = 12,80$, de unde $y = 22,50$ lei.

Analog se determină și celelalte sume:

18. Fie x suma de bani.

$$J_1: \text{ pierdut } \frac{x}{2} + 1 = \frac{x+2}{2}; \text{ rămas: } x - \frac{x+2}{2} = \frac{x-2}{2};$$

$$J_2: \quad \text{,,} \quad \frac{x-2}{2} + 2 = \frac{x+6}{4}; \quad \text{,,} \quad \frac{x-2}{2} - \frac{x+6}{4} = \frac{x-10}{4};$$

$$J_3: \quad \text{,,} \quad \frac{x-10}{4} + 3 = \frac{x+14}{8}; \quad \text{,,} \quad \frac{x-10}{4} - \frac{x+14}{8} = \frac{x-34}{8};$$

$$R. = \frac{x-34}{8} = 0; \quad x = 34 \text{ lei.}$$

$$19. \quad \frac{W \ F \ S \ U}{x \ y \ z \ u}$$

$$\begin{aligned} x \ y \ z \ u \\ x+y+z+u &= 18 \\ xyzu &= n \end{aligned}$$

Sistemul este multiplu nedeterminat; se impun, deci, următoarele ipoteze:

— numărul copiilor=17 (altfel nu s-ar mai fi pus problema constituirii a 2 echipe, a câte 9 copii; iar numărul lor nu ajunge).

— numărul casei n-ar trebui să depășească 200 într-o primă ipoteză, sau 100, de exemplu (ținând seama de loc și de de timp).

Într-o primă variantă rezultă:

- numărul copiilor era de 7, respectiv 5, 4 și 1;
- numărul casei era 140. De studiat și alte variante.

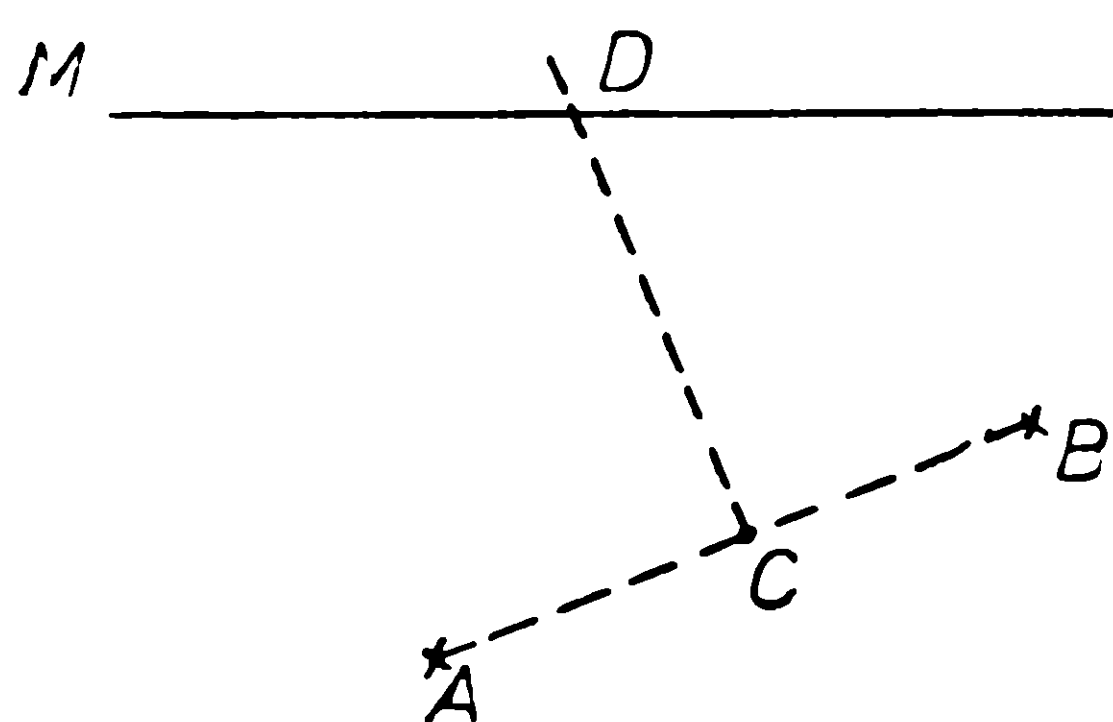


Fig. 76.

20. Locul este dat de intersecția mediatoarei segmentului AB cu MN. Dacă AB este perpendicular pe MN, problema admite o soluție numai dacă A și B sînt simetrice față de MN.

21. Se extrage o bilă din cutia etichetată NA. Dacă bila extrasă este neagră, cealaltă, rămasă în cutie, va fi tot neagră căci, altminteri, eticheta ar fi corectă.

Cutia etichetată AA nu poate conține două bile albe, dar nici două bile negre, deci conține una albă și alta neagră etc.

22. Se iau segmentele egale AB și A'B' (fig. 77); apoi pe prima $\overline{BC} = \overline{CD} = 1$ cm și pe a doua $\overline{B'C'} = \overline{C'D'} = \overline{D'E'} = 1$ cm.

Se împarte AD în trei părți egale prin punctele M și N, iar A'N' în două părți egale prin punctul M'. Dacă A' vine în dreptul lui A atunci rezultatul exact AM și cel greșit A'M' fiind același, reiese că $\overline{AM} = \overline{A'M'}$, și prin urmare că M; N; D; C și B sînt respectiv în dreptul lui M'; N'; D'; C'; B'.

Deci AB=5 cm. Numărul căutat este așa-

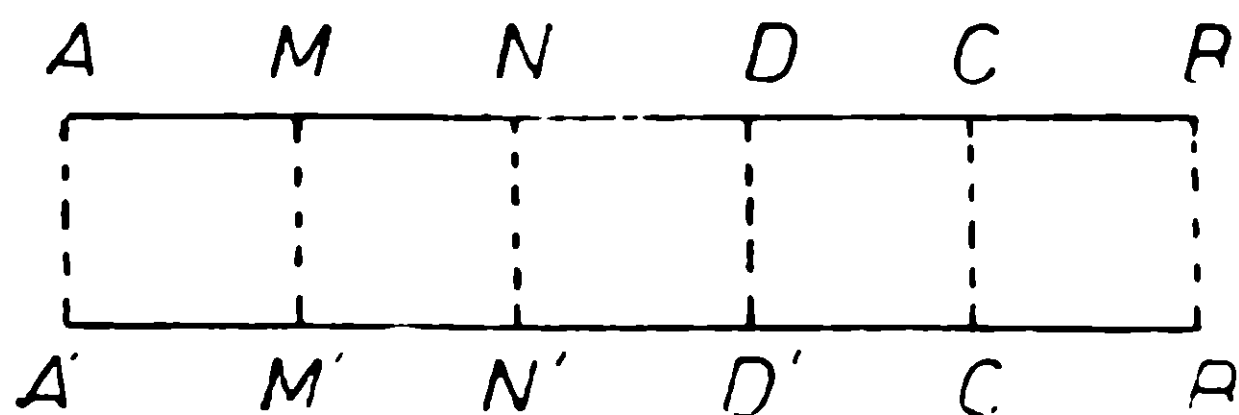


Fig. 77.

$$23. \quad \frac{N \cdot 2 + 30}{2} - N = 15.$$

$$24. \quad t = \frac{0,5}{4-3} = \frac{1}{2} \text{ ore;}$$

$$S = v \cdot t = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5 \text{ km.}$$

25. Numărul merelor trebuie să fie M_7 . Din acești multipli vom exclude pe aceia care se divid cu 2, 3, 4, 5 și 6 și dau cu acestea un rest egal cu 1.

$$7 \times 7 = 49 \quad 7 \times 19 = 133 \quad 7 \times 33 = 231$$

$$7 \times 11 = 77 \quad 7 \times 23 = 163 \quad 7 \times 37 = 259$$

$$7 \times 13 = 91 \quad 7 \times 29 = 203 \quad 7 \times 41 = 287$$

$$7 \times 17 = 119 \quad 7 \times 31 = 217 \quad 7 \times 43 = 301.$$

Răspuns: 301 (este M_7 și împărțit succesiv cu 2, 3, 4, 5 și 6 dă rest 1).

Altă soluție (Eugen Rusu): $n-1=m \cdot c.$ al numerelor 3, 4, 5 $=60k$
 $n=60k+1=7h$, $k=5+7i$. Cea mai mică soluție este 301; urmează 721, ...
 (vezi problema 2, pag. 111).

26. R. $1/4$ de calup cîntărește $3/4$ kg; deci calupul întreg cîntărește 3 kg.

$$27. \quad R \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}.$$

28. Gîndește-te la un număr; adună-l cu 2, înmulțește numărul obținut cu 3, scade dublul numărului la care te-ai gîndit, mai scade 6 din rezultat și vei obține numărul la care te-ai gîndit.

29. Numărul strîngerilor de mînă este egal cu numărul combinațiilor celor 16 persoane luate cîte 2:

$$C_{16}^2 = \frac{16 \cdot 15}{1 \cdot 2} = 8 \cdot 15 = 120.$$

30. Fiecare din cei x participanți a strîns $x-1$ mîini, deci în total au avut loc $x(x-1)$ strîngerii de mînă.

Ținînd seamă că dacă A strînge mîna lui B, acțiunea este reversibilă și deci două astfel de strîngerii de mînă constituie o singură strîngere de mînă distinctă, avem:

$$\frac{x}{2}(x-1) = 66. \text{ Soluția acceptabilă: } x_1 = 12.$$

31. Colegul dă 1 leu, împarte apoi suma de 24 lei, $\left(\frac{24}{2} = 12; \frac{24}{3} = 8; \frac{24}{8} = 3\right)$ după care își iau înapoi 1 leu pe care-l „dăruise“.

De ce a fost necesar leul dăruit de coleg? Pentru că suma celor trei fracții $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{23}{24}$ nu este un întreg. Compară cu problema similară 94, pag. 34.

32. Enunțul problemei nu este clar. Trebuia arătat dacă în acea oră este inclus și drumul înapoi.

Nici un răspuns nu poate fi bun.

33. Inutil, deoarece ori cum ar alege punctul, triunghiul va avea aceeași arie, baza AB și înălțimea (distanța dintre șosea și calea ferată) fiind constante.

34. Se împarte exagonul în șase triunghiuri, iar fiecare din acestea în patru triunghiuri mai mici egale. Se scot apoi cele șase triunghiuri mici care se formează în centrul plăcii exagonale.

35. Situația dată se poate întîlni numai în vecinătatea unuia din cei doi poli ai Pămîntului. Așadar, vînătorul împușcă un urs polar, deci de culoare albă.

36. $BC = \frac{2a}{3}$

37. Diagonala $AC=BD=R=10$ cm.

38. Vezi figura 79.

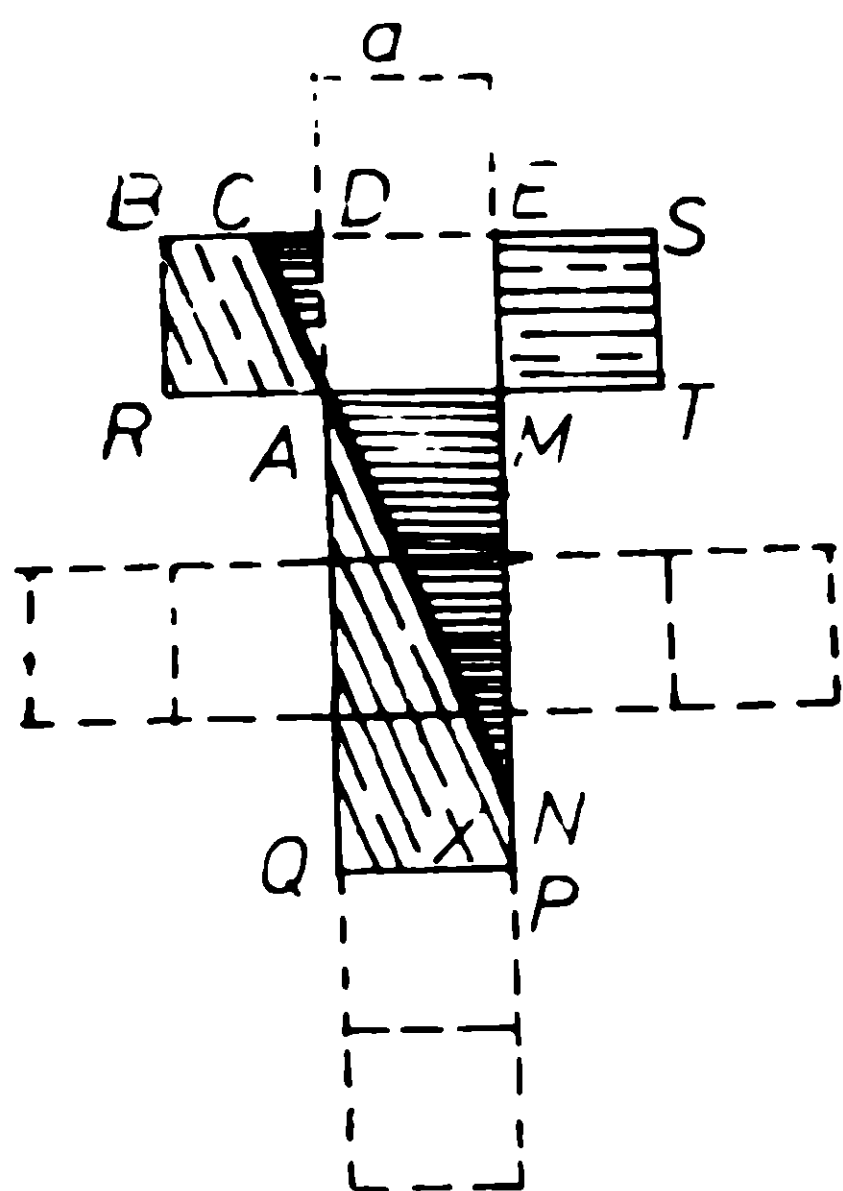


Fig. 78.

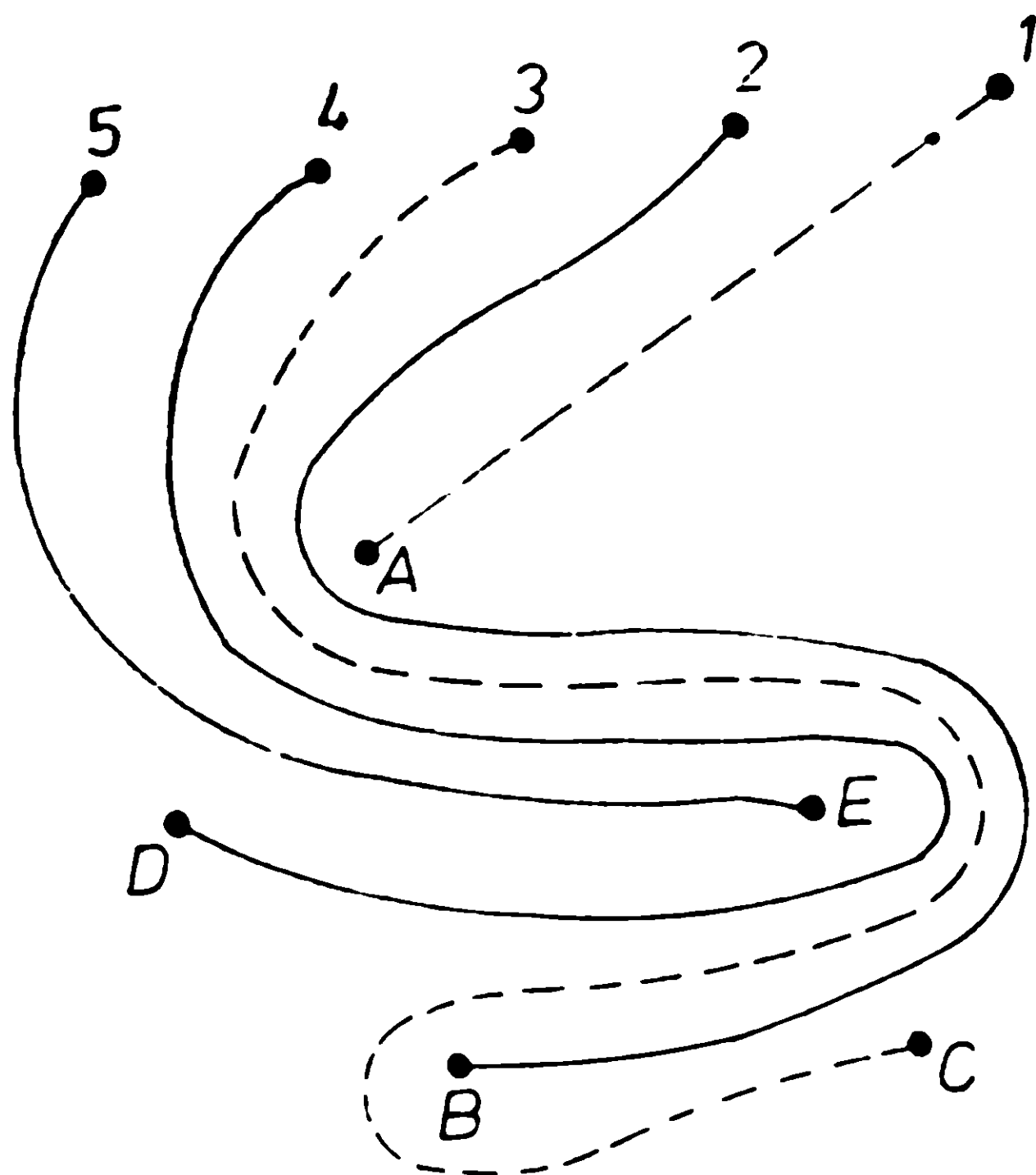


Fig. 79.

39. Figura avînd numai noduri pare (formate din 2 trasee), poate fi descrisă dintr-o singură linie. Se unesc punctele din 3 în 3 în ordinea A, D, B, E, G, A.

40. B poate da trei răspunsuri: R, R; V, V; sau R, V.

După ce toți trei au răspuns o dată, A poate raționa astfel: „Nu pot avea R, R, deoarece atunci C ar vedea 4 timbre roșii și ar ști imediat că are V, V, iar dacă C are V, V, B ar vedea 4 timbre verzi și ar ști că are R, R“. De aceea A răspunde a doua oară: „nu știu“, iar B își spune: „trebuie să am R, V“.

De altfel, enunțul problemei este perfect simetric față de timbrele roșii și cele verzi, deci și soluția trebuie să fie invariantă față de schimbarea dintre roșu și verde, ceea ce se întâmplă numai dacă B are un timbru roșu și unul verde.

41. O soluție ar fi următoarea: Logicianul arată cu degetul un drum și-i spune băștinașului: «Dacă te-aș întreba dacă acest drum duce în sat, ai răspunde „da“?».

Băștinașul este nevoit să dea răspunsul corect, chiar dacă este mincinos. Dacă drumul duce spre sat, mincinosul ar răspunde „nu“ la întrebarea directă, dar, așa cum e pusă întrebarea, el minte și spune că ar răspunde „da“.

7. Versiuni noi ale unor probleme mai vechi

1. Dacă $n(n+2)(n+4)(n+6)=m^2$, atunci $(n^2+6n+4)^2=m^2+16$. Dar singurele pătrate de forma a^2-16 sînt 0 și 9 și, deoarece m^2 este impar, rezultă că pătratul căutat este $9=(-3)(-1) \cdot 1 \cdot 3$.

2. Avem: $(n^2+n)^2=n^4+2n^3+n^2 < n^4+2n^3+2n^2+2n+1 < n^4+2n^3+3n^2+2n+1=(n^2+n+1)^2$. Prin urmare, numărul dat este situat între două pătrate consecutive.

3. Dacă $B>1$ este baza sistemului de numerație, 11111 poate fi scris $B^4+B^3+B^2+B+1$.

Avem: $(B^2+B/2)^2 < B^4+B^3+B^2+B+1 < (B^2+B/2+1)^2$, deci cu B par n nu poate fi pătrat.

Pentru B impar >3 , avem:

$$\left(B^2 + \frac{B-1}{2}\right)^2 < n < \left(B^2 + \frac{B+1}{2}\right)^2.$$

Pentru $B=3$, $n = \left(B^2 + \frac{B+1}{2}\right)^2$, respectiv $11\ 111=102^2$.

4. Dacă $ar^2+ar+a=a^3$, atunci $r^2+r+1=a^2$. Orice cifră a , în sistemul de numerație în baza r , este mai mică decît r . Prin urmare ultima egalitate este imposibilă.

5. Fie $b=(x-1/x)^{1/2}$ și $a=(1-1/x)^{1/2}$. Atunci $x=a+b$ (1) și fiindcă $x \neq 0$, $b-a=(b^2-a^2)(b+a)=(x-1)/x=1-1/x$ (2).

Adunînd relațiile (1) și (2) obținem:

$$2b=x-1/x+1=b^2+1, \text{ deci } b=1.$$

Prin urmare, $x-1/x=1$, $x^2-x-1=0$ și $x=(1 \pm \sqrt{5})/2$. Însă singura valoare care satisface ecuația inițială este $x=(1+\sqrt{5})/2$.

6. Dacă x este numărul de animale, y numărul de oi și z prețul mie-lului, atunci avem $x^2=10y+z$ cu y un număr impar și $z<10$.

Penultima cifră a unui pătrat perfect este impară dacă și numai dacă ultima cifră este 4 sau 6. Convine $z=6$ și fiul care a avut numai oi trebuie să cedeze fratelui său 2 dolari.

7. Pentru orice funcție polinomială $f(x)$, $f(1)$ reprezintă suma coeficienților polinomului. Dacă această sumă este egală cu zero, $(x-1)$ este un divizor al lui $f(x)$. Deoarece $1-2+3+4-6=0$, $x=1$ este rădăcină a ecuației date, indiferent de modul în care înlocuim parantezele.

8. Avem: $x^9+y^9=(x+y)(x^8-x^7y+x^6y^2+\dots+y^8)=(x^3+y^3)(x^6-x^3y^3+y^6)$
 $+y^8)=(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^6-x^3y^3+y^6)$ deci $x^8-x^7y+x^6y^2-\dots+y^8=$
 $=(x^2-xy+y^2)(x^6-x^3y^3+y^6)$.

9. Ecuația $x-5x^3-4x^2-7x+4=0$ poate fi pusă sub formă $(x^2-2)^2=5x^3+7x$. Pentru x negativ, membrul stîng al ecuației este pozitiv și membrul drept este negativ. Rezultă deci că ecuația dată nu admite soluții negative.

$$10. \text{ R. } \frac{27+8i}{3+2i} = \frac{(27+8i)(3+2i)}{13} = 5+6i.$$

11. Avem: $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$, deci $(x-1)f(x)=x^5-1$. Putem scrie: $f(x^5)=(x^{20}-1)+(x^{15}-1)+(x^{10}-1)+(x^5-1)+4+1$. Fiecare polinom dintre paranteze este multiplu al lui x^5-1 și prin urmare al lui $f(x)$. În consecință $f(x^5)=(\text{un multiplu al lui } f(x))+5$.

$$12. \left[\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 3 \cdot 6 \cdot 12 + \dots}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + 3 \cdot 9 \cdot 27 + \dots} \right]^{1/3} = \left[\frac{1 \cdot 2 \cdot 4(1^3+2^3+3^3+\dots)}{1 \cdot 3 \cdot 9(1^3+2^3+3^3+\dots)} \right]^{1/3} =$$

$$= (8/27)^{1/3}.$$

13. Conform unei cunoscute reguli referitoare la proporții, dacă $a/b=c/d$, atunci $(a+b)/b=(c+d)/d$. Aplicînd această regulă la ecuația dată se obține: $\frac{1^3+2^3+3^3+\dots+(2n)^3}{2^3(1^3+2^3+3^3+\dots+n^3)} = \frac{441}{242}$

Restrîngînd sumele de cuburi, obținem:

$$\frac{(2n)^3(2n+1)^2/4}{(8n^3)(n+1)^2/4} = \frac{441}{242} = \frac{21^2}{2 \cdot 11^2}; \quad \frac{(2n+1)^2}{(n+1)^2} = \frac{21^2}{11^2},$$

Deci $n=10$ (rădăcina negativă nu e acceptabilă).

14. Orice număr întreg x este de forma $3n$ sau $3n \pm 1$. Dacă substituim aceste forme în ecuația $x^2-3y^2=17$, rezultatul se poate scrie respectiv $3(3n^2-y^2)=17$ și $3(3n^2 \pm 2n - y^2)=16$.

Deoarece 3 nu divide nici pe 17 și nici pe 16, aceste ecuații nu pot să admită soluții întregi¹.

15. Dacă punem $x+y=a^2$ și $x-y=a$, atunci $x=a(a+1)/2$ și $y=a(a-1)/2$. Fiecare numărător fiind produsul dintre un număr par și unul impar rezultă că pentru orice a întreg, x și y sînt întregi.

16. Frația poate fi scrisă în modul următor:

$$(p+1+1/p)(q+1+1/q)(r+1+1/r)(s+1+1/s).$$

Se știe că suma unui număr pozitiv cu inversul său este ≥ 2 . Rezultă că fiecare factor al produsului este ≥ 3 și deci produsul este ≥ 81 .

¹ Altă soluție (E.R.). Un pătrat este sau M_3 sau M_3+1 ; în ecuația dată $x^2=M_3+2$, deci $\neq k^2$.

Este evidentă următoarea generalizare a acestei probleme:
pentru $a_i \geq 0, i=1, 2, 3, \dots$

$$\frac{(a_1^2 + a_1 + 1)(a_2^2 + a_2 + 1) \dots (a_n^2 + a_n + 1)}{a_1 a_2 \dots a_n} \geq 3^n.$$

17. Deoarece coeficientul lui x^2 este 0, rezultă că $a+b+c=0$ și prin urmare $b+c=-a$, $c+a=-b$, $a+b=-c$, deci ecuația căutată va avea rădăcinile: $-1/a, -1/b, -1/c$ ¹.

Pentru a o obține nu trebuie decât să scriem coeficienții în ordine inversă și să schimbăm semnul coeficienților puterilor pare ale lui x ; vom obține: $rx^3 - qx^2 - 1 = 0$.

18. Media aritmetică a unei mulțimi de numere pozitive, nu toate egale între ele, este strict mai mare decât media lor geometrică, deci $n = \frac{n^2}{n} = \frac{1+3+5+7+\dots+(2n-1)}{n} > [1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots 2(n-1)]^{1/n}$

19. Fie $N = 3^{1/3} \cdot 3^{2/9} \cdot 3^{3/27} \dots = 3^{1/2+2/9+3/27+\dots} = 3^M$. Atunci $M/3 = 1/3^2 + 2/3^3 + \dots + (n-1)/3^{n+1} \dots$

$$(1 - 1/3)M = 1/3 + 1/3^2 + 1/3^3 + \dots + 1/3^n + \dots = (1/3)(1 - 1/3) = 1/2.$$

Prin urmare: $N = 3^{3/4} = \sqrt[4]{27}$.

20. Amplificînd cu $1-x$, avem:

$$\begin{aligned} 1/(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8) &= (1-x)/(1-x^{16}) = \\ &= (1-x)(1+x^{16}+x^{32}+x^{48}+\dots) = 1-x+x^{16}-x^{17}+x^{32}-x^{33}+\dots \end{aligned}$$

21. Multiplicînd ecuația dată cu 4 și adunînd 1 în ambii membri obținem: $4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = (2y+1)^2$.

Pentru $x=-1$ rezultă $y=-1$ sau $y=0$; pentru $x=0$ rezultă $y=-1$ sau $y=0$. Pentru $x=2$ rezultă $y=-6$ sau $y=5$. Pentru $x=-1$, y este fracționar.

Acestea sînt toate soluțiile întregi ale ecuației, deoarece pentru $x < -1$ sau $x < 2$, membrul stîng al ecuației este mai mare ca $(2x^2+x)^2$, dar mai mic decât $(2x^2+x+1)^2$ și deci nu poate fi egal cu numărul care figurează în membrul drept al ecuației și care este un pătrat perfect.

22. Dacă ecuația admite o rădăcină reală, aceasta trebuie să fie negativă. Fie ea $-y$.

$$\text{Dar } 1 - y + y^2/2! - y^3/3! + \dots + y^{2n}/(2n)! > e^{-y} > 0$$

Prin urmare ecuația nu are rădăcini reale.

23. Fie cercul cu centrul 0 și de rază r . Plimbăm cu compasul raza r pe circumferință construind arcele egale AB, BC și CD . Atunci AD e un diametru. Cu centrele în A și D și raza AC descriem două arce care se taie în E și E' .

¹ Explicația suplimentară:

$$\left(x - \frac{b+c}{a^2}\right) \left(x - \frac{a+c}{b^2}\right) \left(x - \frac{a+b}{c^2}\right) = 0;$$

$$(ax+1)(bx+1)(cx+1)=0; \quad x_1 = -\frac{1}{a}, \quad x_2 = -\frac{1}{b}; \quad x_3 = -\frac{1}{c} \text{ etc.}$$

Cercul cu raza OE și centrul în A taie cercul inițial în F și G . Atunci punctele $AFDG$ formează împărțirea căutată.

Demonstrație: $AC = r\sqrt{3} = AE$

$$OE = \sqrt{AE^2 - r^2} = r\sqrt{2} = AF.$$

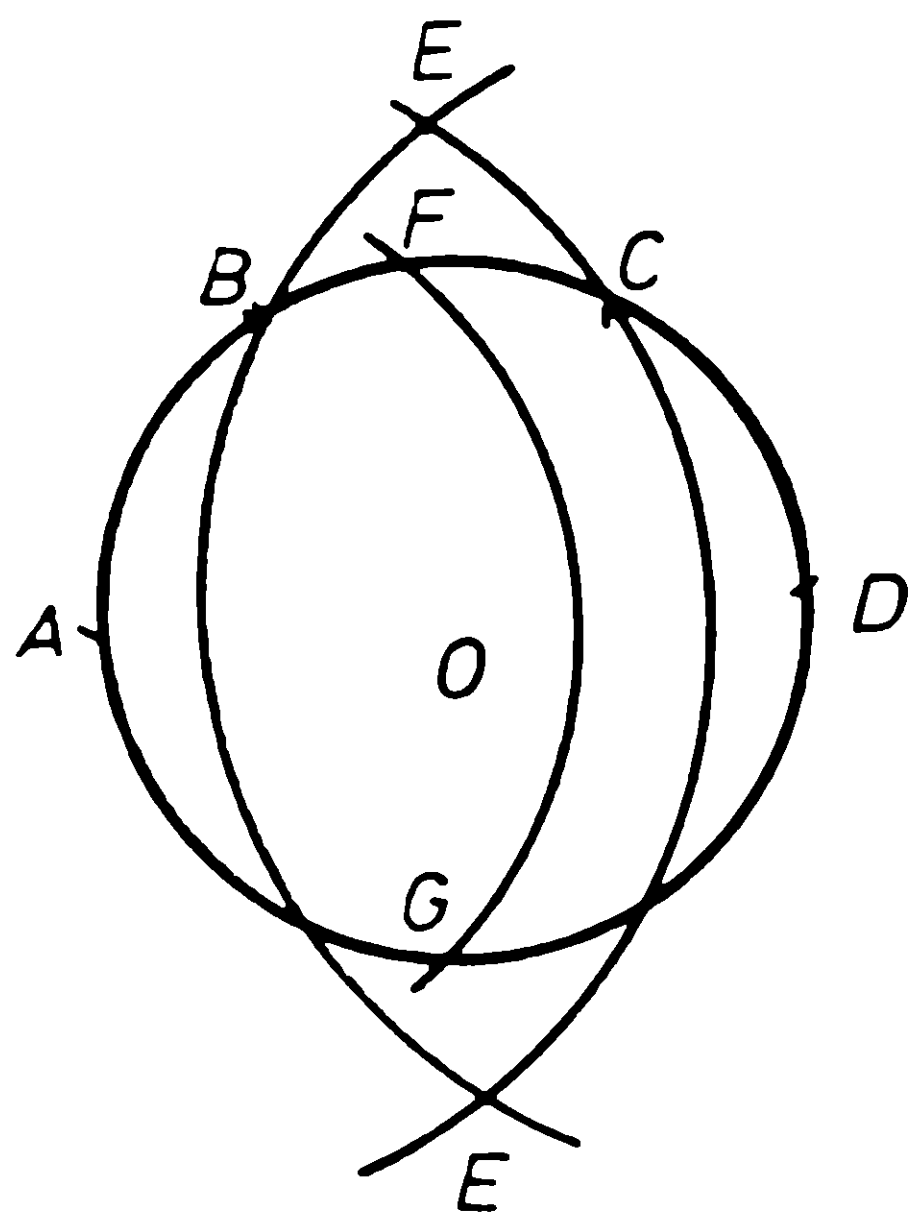


Fig. 80.

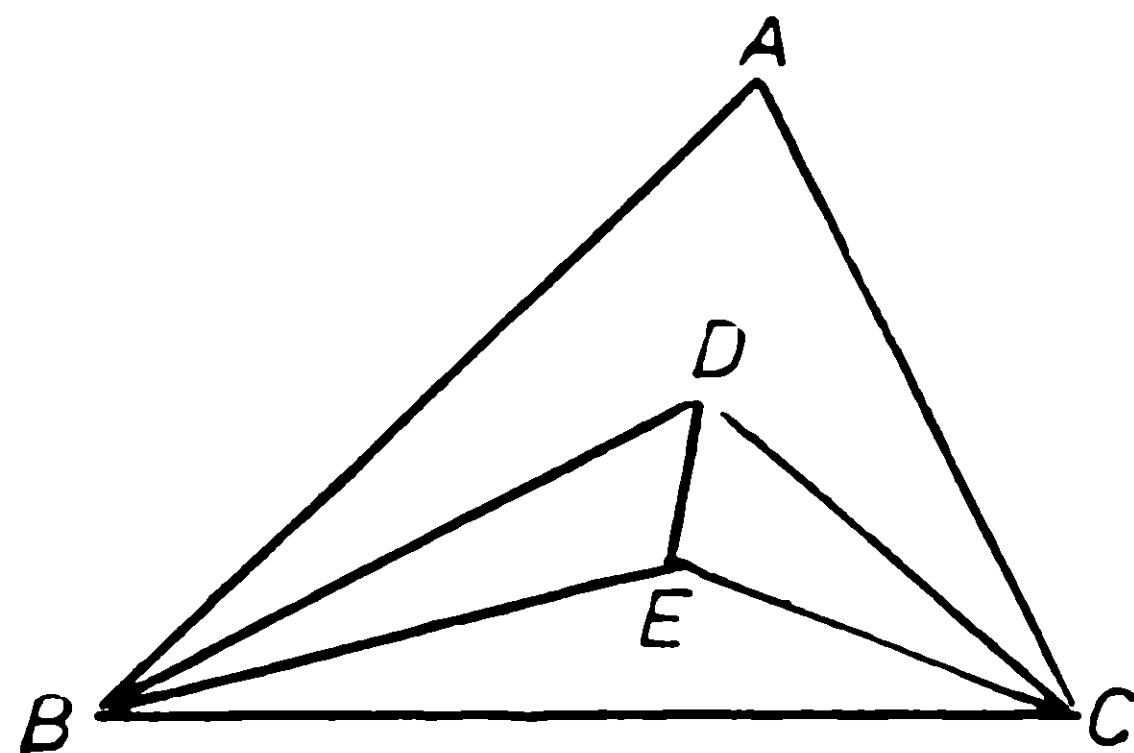


Fig. 81.

24. E se găsește la intersecția bisectoarelor triunghiului BCD și deci DE este bisectoarea unghiului BDC .

25. Să considerăm o secțiune arbitrară a volumului comun celor doi cilindri, paralelă cu secțiunea centrală determinată de axele de simetrie. Ea va fi un pătrat, al cărui cerc înscris va fi secțiunea corespunzătoare a sferei înscrise în volumul comun al celor doi cilindri. De aici rezultă că raportul dintre volumul comun și volumul sferei înscrise este egal cu raportul dintre aria pătratului și aria cercului înscris în pătrat, deci: $V = (4\pi r^3/3)(4/\pi) = 16r^3/3$. (Se observă că spațiul comun celor doi cilindri poate fi subdivizat în piramide infinitezimale ale căror vîrfuri se află la intersecția axelor și cu

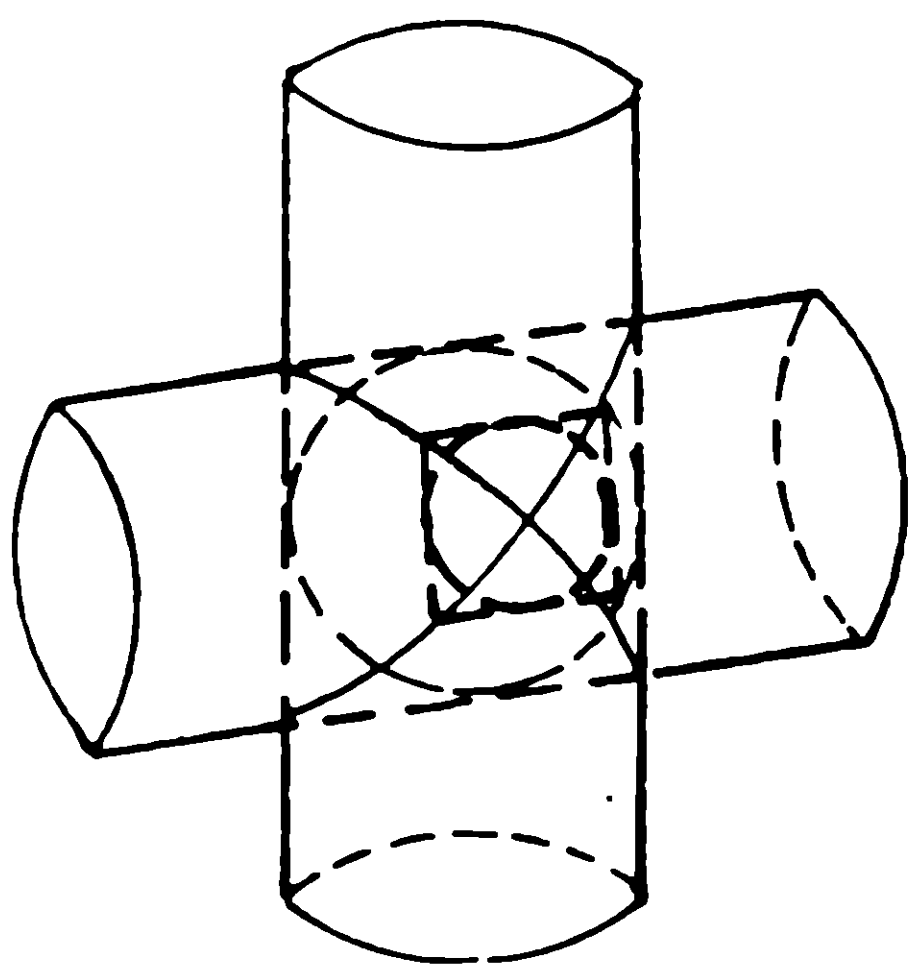


Fig. 82.

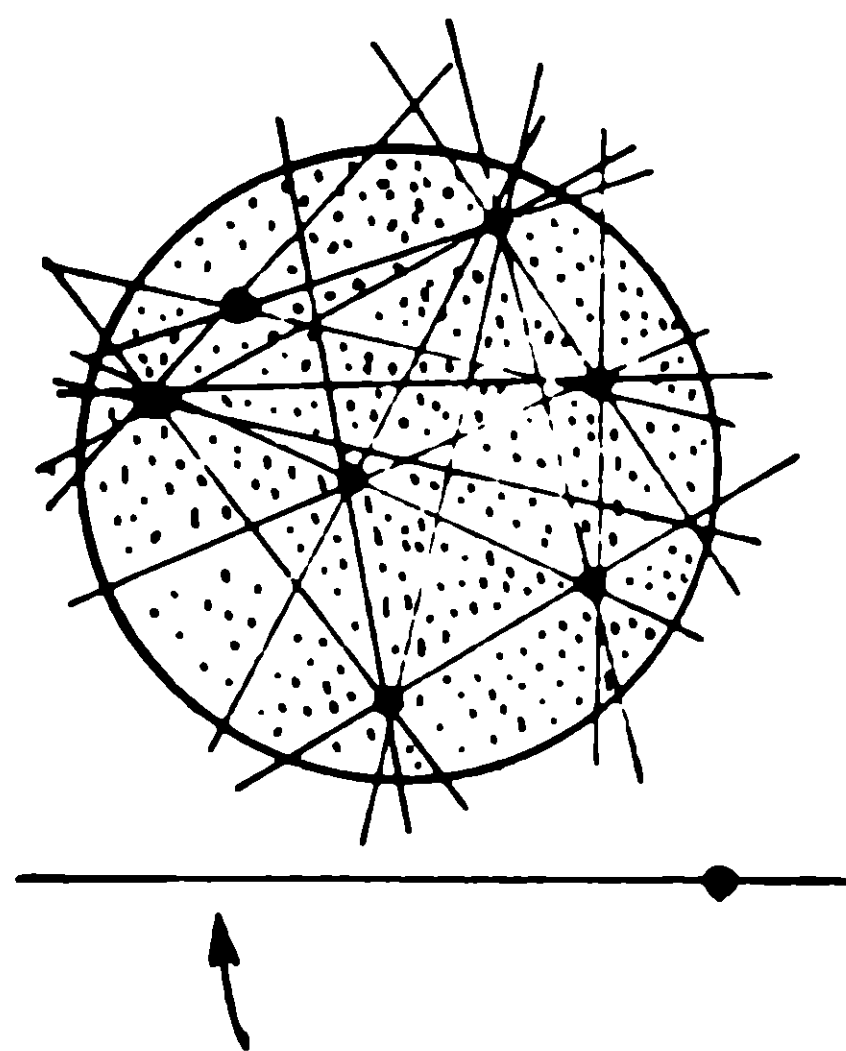


Fig. 83.

bazele de-a lungul generatoarelor cilindrilor. Aceste piramide au înălțimea egală cu unitatea, de unde vom deduce că aria figurii noastre este egală cu 16.

26. Să considerăm toate dreptele determinate de perechi de puncte din mulțime. Să alegem apoi un nou punct aflat în afara cercului și care nu

aparține nici uneia din aceste drepte. Să considerăm o dreaptă care trece prin acest punct, situată la stînga mulțimii de puncte date. Cînd această dreaptă se rotește în jurul noului punct înspre mulțime (în cazul figurii noastre, spre dreapta) ea nu întîlnește în nici o poziție mai mult decît un punct. Rotim această dreaptă pînă cînd a trecut peste exact un milion de puncte. Poziția finală va fi cea căutată.

27. Deoarece $|\sqrt{b}-\sqrt{c}|(\sqrt{b}+\sqrt{c})=|b-c|<(\sqrt{a})^2<(b+c)<(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2$ avem: $|\sqrt{b}-\sqrt{c}|<\sqrt{a}<(\sqrt{b}+\sqrt{c})$.

Altfel (E.R.): Dacă $a>b>c$, pentru ca a, b, c să fie laturile unui triunghi e suficient ca $a<b+c$, respectiv $\sqrt{a}<\sqrt{b}+\sqrt{c}$, ceea ce este evident.

28. Laturile triunghiului și ale hexagonului se află în raportul 2:1. Să observăm că triunghiul poate fi descompus în patru triunghiuri echilaterale, iar hexagonul în șase triunghiuri echilaterale, toate egale între ele. Rezultă că raportul ariilor este 2:3.

29. Formula de recurență care dă numerele lui Fibonacci fiind $F_n+F_{n+1}=F_{n+2}$, înseamnă că trei numere ale lui Fibonacci consecutive satisfac ecuația $x+y=z$. Prin urmare cele patru vîrfuri ale tetraedrului fiind coplanare, volumul său este nul.

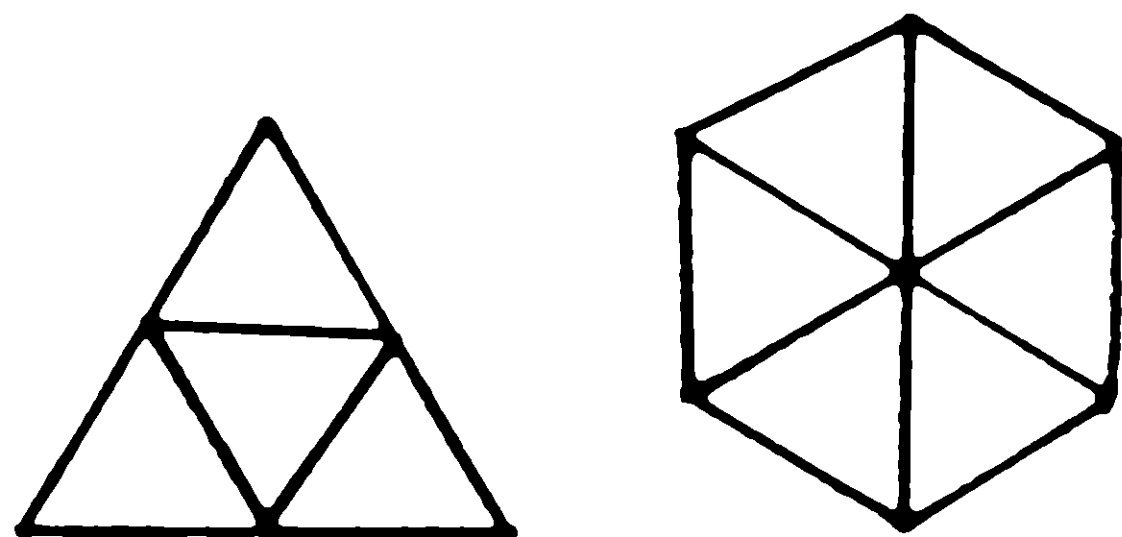


Fig. 84.

Mai mult, cele 12 coordonate nu trebuie să fie termeni consecutivi. Același rezultat rămîne valabil și în cazul cînd ordonatele fiecărui vîrf sînt numere ale lui Fibonacci consecutive.

30. Teorema lui Pappus afirmă că dacă vîrfurile alternative ale unui hexagon sînt situate respectiv pe două drepte, atunci intersecțiile laturilor opuse sînt coliniare. Dacă AB și DC se intersectează în I , atunci laturile

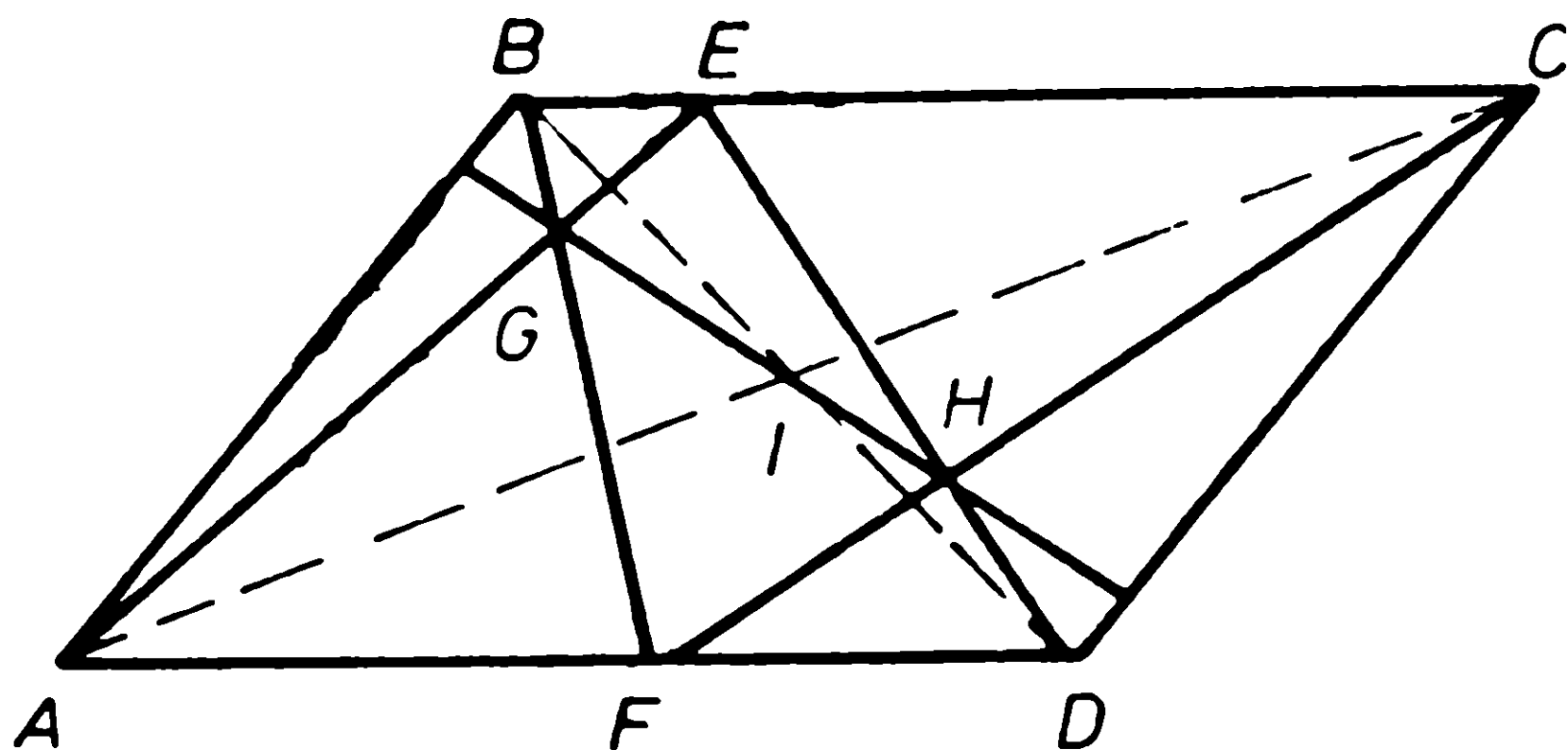


Fig. 85.

opuse ale hexagonului AEDBFC se intersectează în G, I și H , care, prin urmare, sînt coliniare. Orice dreaptă dusă prin punctul de intersecție I al diagonalelor unui paralelogram împarte paralelogramul în două figuri egale.

Altfel: se aplică teorema lui Menelau în triunghiurile BFC și AED .

31. Dacă două triunghiuri au aceeași înălțime, raportul ariilor lor este egal cu raportul bazelor, notînd ciclic cele patru triunghiuri: $\frac{A}{A+B} = \frac{m}{m+n} = \frac{D}{C+D} = \frac{A+D}{A+B+C+D} = \frac{D+A}{Q}$.

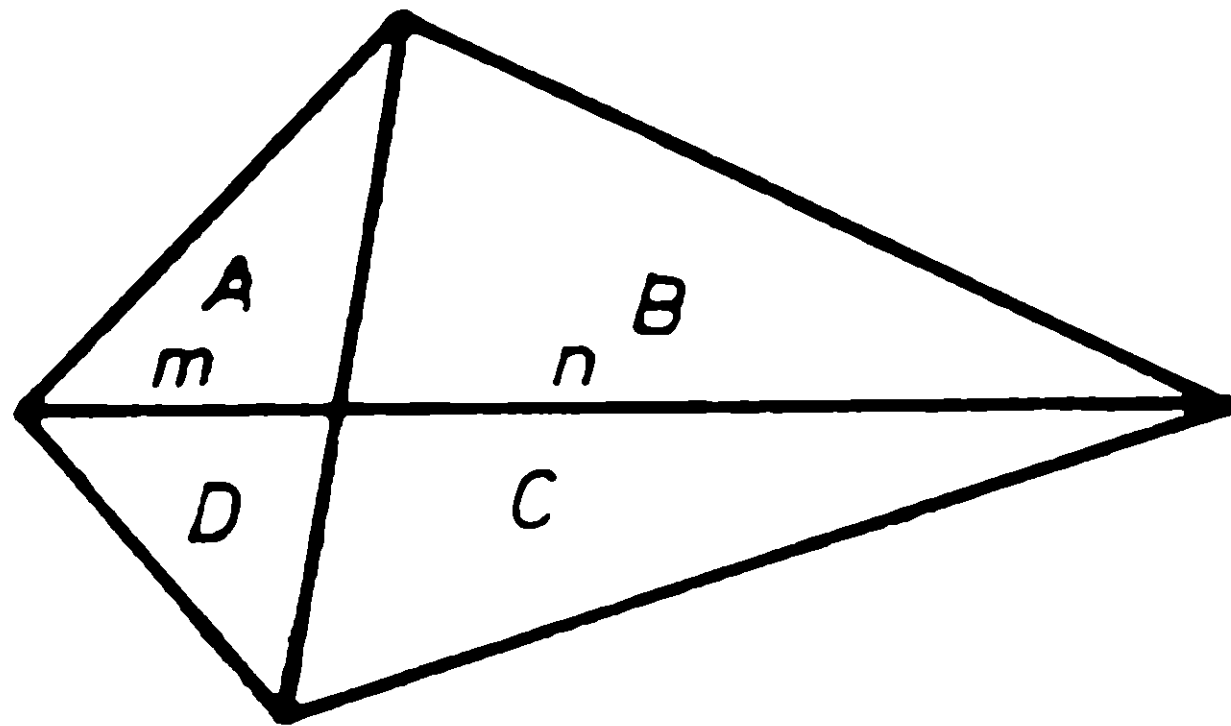


Fig. 86.

Analog: $\frac{B}{B+C} = \frac{A+B}{Q}$, $\frac{C}{C+D} = \frac{B+C}{Q}$ și $\frac{D}{D+A} = \frac{C+D}{Q}$.

Înmulțind membru cu membru cele patru egalități obținem:

$$(A)(B)(C)(D) = (A+B)^2(B+C)^2(C+D)^2(D+A)^2/Q^4.$$

Bibliografie

1. E. KOLMAN: *Istoria matematicii în antichitate* (traducere din limba rusă). București, Editura Științifică, 1961.
2. A. P. IUȘKEVICI: *Istoria matematicii în evul mediu* (traducere din limba rusă). Ed. Științifică, 1963.
3. H. WIELEITNER: *Istoria matematicii de la Descartes pînă la mijlocul secolului al XIX-lea* (traducere după ediția rusă). București, Ed. Științifică, 1964.
4. I. DEPMAN: *Din istoria matematicii*. București, Ed. Cartea Rusă, 1952.
5. G. N. BERMAN: *Prieomî bîstrogo sceota*. Leningrad, Ed. 2-a, 1947.
6. TATON RENÉ: *Histoire du calcul*. Paris, Presses Universitaires de France, Ed. 2, 1949.
7. GEORGE ȘT. ANDONIE: *Istoria matematicii în România*, vol. I. București, Ed. Științifică, 1965.
8. O. SACTER: *Despre numere și istoria lor*. București, Ed. Tehnică, 1952.
9. EUGEN RUSU: *Manual de aritmetică*. București, Editura de Stat Didactică și Pedagogică, 1957.
Bazele teoriei numerelor. București, Editura Tehnică, 1953.
10. I. CREANGA: *Introducere în teoria numerelor*. București, Ed. Didactică și Pedagogică, 1965.
11. FLORICA T. CÂMPAN: *Probleme celebre din Istoria matematicii*. București, Editura Albatros, 1972,
12. ANTON DUMITRIU: *Soluția paradoxelor logico-matematice*. București, Editura Științifică, 1966.
13. I. I. PERELMAN: *Aritmetica distractivă* (traducere din limba rusă). București, Ed. Tineretului, 1963.
14. I. I. PERELMAN: *Matematica vie* (traducere). București, Editura de Stat, 1949.
Algebra distractivă (traducere). București, Editura Științifică, 1961.
Geometria distractivă (traducere). București, Editura Științifică, 1965.
15. B. A. KORDEMSKI: *Matematica distractivă* (traducere din limba rusă). București, Editura Tineretului, 1959.
16. A. P. DOMOREAD: *Jocuri și probleme distractive de matematică*. București, Editura Didactică și Pedagogică, 1965.

17. MARTIN GARDNER: *Amuzamente matematice*. București, Editura Științifică, 1968.
18. Dr. Ing. B. IOSUB: *Matematica recreativă*. București, Editura Tehnică, 1952.
Geometria recreativă. București, Editura Tineretului, 1954.
Aritmetica recreativă. București, Editura Tineretului, 1957.
19. WALTER SPERLING: *1 000 probleme distractive*. Craiova.
20. H. STEINHAUS: *Caleidoscop matematic*. București, Editura Tehnică, 1961.
21. F.G.M.: *Exercices d'algèbre*. Paris, 1920.
22. GHEORGHE ȚÎȚICA: *Culegere de probleme de geometrie*. București, Editura Tehnică, 1957.
23. ION IONESCU: *Culegere de probleme de aritmetică, partea I, Aritmetica rațională*. București, 1937.
24. IVANCA OLIVOTTO: *Culegere de probleme de aritmetică*. București, Editura de Stat Didactică și Pedagogică, 1958.
25. CRISTEA MATEESCU: *Ion Ionescu*. București, Ed. Științifică, 1966.
26. BOTEZ ȘT. MIHAIL: *Gheorghe Țîțica*. București, Ed. Tineretului, 1958.
27. GAZETA MATEMATICĂ: Anii 1960 — 1974.
28. N. MIHĂILEANU: *Istoria matematicii*, vol. I, București, Editura Enciclopedică Română, 1974.
29. CHARLES W. TRIGG: *Ingeniozitate și surpriză în Matematică*, București, Editura Enciclopedică Română, 1975.
30. AL. FRODA: *Eroare și paradox în matematică*, București, Editura Enciclopedică Română, 1971.

Redactor: MARIA PALENCIUC
Tehnoredactor: VICTORIA UNGUREANU

***Coli de tipar: 12. Bun de tipar: 07.04.1977. Tiraj:
1 500 ± 30 S.P. Apărut: 1977. Lucrare apărută în regia
autorului.***

**Tiparul executat sub comanda nr. 59, la Întreprinderea
poligrafică „Crișana”, Oradea, str. Moscovei nr. 5.
Republica Socialistă România**





EDITURA LITERA